Groupes d'ordre 12

1. Valeurs possibles pour n_2 et n_3

Par le théorème de Sylow, on a $n_2 | 3$ et $n_2 \equiv 1 \pmod 2$ donc $n_2 = 1$ ou 3

On a $n_3 | 4$ et $n_3 \equiv 1 (3)$ donc $n_3 = 1$ ou 4

2. G abélien ssi $n_2 = n_3 = 1$

- G est abélien : tous les sous-groupes sont distingués et donc il existe un unique p-Sylow pour tout p. On a donc bien $n_2 = n_3 = 1$

- $n_2 = 1$ et $n_3 = 1$: On note P_2 et P_3 l'unique 2-Sylow (resp. 3-Sylow de G). On a $P_2 \triangleleft G$ et $P_3 \triangleleft G$ (puisqu'ils sont uniques). De plus $P_2 \cap P_3 = \{e\}$ et $P_2 P_3 = G$ (par exemple : c'est un sous-groupe contenant strict. P_2 donc son ordre est > 4 et divise 12 donc c'est 12). Il suit que $G \simeq P_2 \times P_3$. Comme P_2 et P_3 sont abéliens (car d'ordre 4 et 3 resp.), on a G abélien.

2.1 G abélien. Montrer il existe $g \in G$ d'ordre 6 ou 12

Soit $a \in S_2$ avec $a \neq e$ et soit $b \in P_3$ avec $b \neq e$. Puisque G est abélien, a et b commutent et donc son ordre est $\operatorname{ppcm}(\text{ordre}(a), \text{ordre}(b))$. On a $\text{ordre}(b) = 3$ et $\text{ordre}(a) = 2$ ou 4 et le résultat suit.

2.2 Structure de G

Si G possède un élément d'ordre 12, on a $G \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Sinon G ne possède pas d'éléments d'ordre 4 et donc $S_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a donc $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ par le théorème des restes chinois.

3. G non abélien. Si $n_3 \neq 1$ alors $n_2 = 1$

Si $n_3 \neq 1$ alors $n_3 = 4$. Comptons les éléments d'ordre 3. Chaque élément d'ordre 3 est contenu dans un des quatre 3-Sylows. De plus, pour deux 3-Sylows distincts P et Q, on a $P \cap Q = \{e\}$ et donc chaque 3-Sylow fournit deux éléments d'ordre 3. On a donc 8 éléments d'ordre 3 dans G. Il reste donc $12 - 8 - 1 = 3$ éléments d'ordre $\neq 1$ et 3. Puisque chaque 2-Sylow contient 3 éléments d'ordre 2 ou 4. Il existe dans ce cas un unique 2-Sylow : c'est-à-dire $n_2 = 1$.

4. $n_3 = 4$. Action de G sur les 3-Sylow : $g \in G$, P 3-Sylow $g \cdot P = g P g^{-1}$

4.1 Stabilisateur d'un 3-Sylow est lui-même

Soit P un 3-Sylow. Par le théorème de Sylow, l'action de G sur les 3-Sylow est transitive et donc l'orbite Ω_P de P est d'ordre 4. On a donc $|\mathrm{Stab}_G(P)| = \frac{|G|}{|\Omega_P|} = 3$. Comme il est clair que $P \subseteq \mathrm{Stab}_G(P)$, on trouve que $\mathrm{Stab}_G(P) = P$.

4.2 Action fidèle puis $G \simeq A_4$

Le noyau de l'action est l'intersection des stabilisateurs et donc il est égal à $\{e\}$ par la question précédente. En numérotant les 3-Sylows, cette action définit un morphisme de G dans S_4. Ce morphisme est injectif puisque l'action est fidèle. Donc

G est isomorphe à un sous-groupe de S_4 d'ordre 12. Mais A_4 est l'unique sous-groupe d'ordre 12 dans S_4 et donc $G \simeq A_4$ [Résultat: A_n est le seul groupe d'ordre $\frac{n!}{2}$ dans S_n]

5. $n_3 = 1$ et $n_2 = 3$. $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

Soit P_3 l'unique 3-Sylow (donc $P_3 \triangleleft G$) et soit Q un des 2-Sylow. On a $P_3 \cap Q = \{e\}$ et $P_3 Q = G$ (cf. question 2, le point important est que $P_3 Q$ est un sous-groupe car P_3 est distingué). On a donc $G \simeq P_3 \rtimes Q$ et le résultat suit puisque tout groupe d'ordre 4 est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.