Topologie des espaces métriques

1. Espaces métriques
2. Fonctions continues
3. Compacité
4. Connexité
5. Complétude

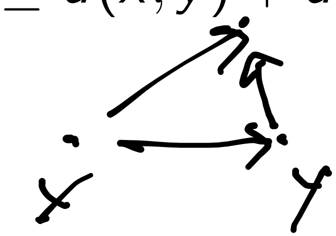
§1.1 Topologie – Espaces métriques

Définition

Une distance sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. (séparation) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0$ ssi $x = y$
2. (symétrie) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

(X, d) est un espace métrique



Définition

Une norme sur un espace vectoriel X (sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) est une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. (séparation) $\forall x \in X,\ \|x\| = 0$ ssi $x = 0$
2. (homogénéité) $\forall x \in X,\ \forall \lambda,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
3. (inégalité triangulaire) $\forall x, y \in X,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé

$d(x,y) = \|x - y\|$

Résultat. Soit (X, d) espace métrique,

$$\forall x, y, z \in X, \quad |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$$

Théorème

Soit $(X, \|\cdot\|)$ espace normé alors $d(x,y) = \|x - y\|$ est une distance sur X

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ avec la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
2. La distance discrète sur tout ensemble X

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition

Deux distances d_1 et d_2 sur X sont Lipschitz-équivalentes s'il existe $m, M > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X, \quad m\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M\, d_1(x,y)$$

$\exists$ $C \geq 1$ $\quad \frac{1}{C} d_1 \leq d_2 \leq C d_1$

Définition

Soit (X, d) espace métrique. Pour $x \in X$ et $r \geq 0$, on pose

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad \text{(boule ouverte)}$$
$$B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \quad \text{(boule fermée)}$$

Une partie A de X est bornée si il existe $M \geq 0$ tel que $\forall a, a' \in A$, $d(a, a') \leq M$, c'est équivalent à demander que A est contenue dans une boule. Pour $A \subseteq X$, une partie bornée, on définit son diamètre par

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

Proposition

Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques. Alors on peut définir les deux distances suivantes sur $X \times Y$

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$
$$\boxed{d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}}$$

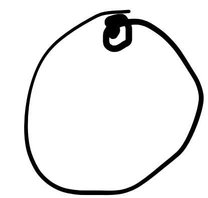
La distance d_∞ est la distance produit

Résultat. Ces deux distances sont Lipschitz-équivalentes

Définition

Une partie A d'un espace métrique (X, d) est un ouvert si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.

Résultat. Une boule ouverte est un ouvert et une boule fermée est un fermé.



Théorème

Si d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes sur X alors les ouverts de (X, d_1) sont exactement les ouverts de (X, d_2).

Théorème

La famille des ouverts de (X, d) vérifie les propriétés suivantes :

1. *Toute union (arbitraire) d'ouverts est un ouvert*
2. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert*

(Un énoncé équivalent en découle pour les fermés)

Boules ouvertes, boules fermées

Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x \in X$ et r un réel strictement positif. On note $B(x, r)$ (resp. $B_f(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r.

1. Montrer que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de X.
2. Montrer que l'adhérence de $B(x, r)$ est incluse dans $B_f(x, r)$ et que l'intérieur de $B_f(x, r)$ contient $B(x, r)$.
3. On suppose dans cette question que X est un espace vectoriel normé, muni d'une norme $\| \ \|$. Montrer que les inclusions précédentes sont en fait des égalités.
4. Donner un exemple d'un espace métrique (X, d) pour lequel les résultats de la question 3. sont faux.

Définition

La topologie d'un espace métrique (X, d) est l'ensemble des ouverts de X. Si A est une partie de X, la topologie induite est celle donnée par la restriction de d à $A \times A$.

$\{\text{ouverts } A\} = \{U \cap A \mid U \text{ ouvert de } X\}$

Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques, la topologie produit de $X \times Y$ est celle donnée par la distance d_∞ (max. entre d_X et d_Y)

Définition

Une base de la topologie de (X, d) est un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X telles que : tout élément de $\mathcal{B}$ est ouvert et tout ouvert (non vide) de X est union (arbitraire) d'éléments de $\mathcal{B}$

Résultat. Les boules ouvertes forment une base de la topologie de (X, d)

A ouvert : $\forall a \in A, \exists r_a > 0$ tel $B(a, r_a) \subseteq A$

$\Longrightarrow A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a)$

Définition

Un espace métrique est séparable s'il admet une base de topologie au plus dénombrable

fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$

Définition

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). On dit (x_n) converge vers $\ell \in X$ si

$N(\varepsilon)$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, \ d(x_n, \ell) \leq \epsilon$$

Résultat. La limite, si elle existe, est unique ← à démontrer

Définition

Une suite extraite d'un suite (x_n) d'éléments de X est une suite de la forme $(x_{f(n)})$ où $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante (et donc $\forall n$, $f(n) \geq n$).

$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$ $\qquad f(1) > f(0) \geq 0$

Théorème

Toute suite de réels admet une sous-suite monotone.

Définition

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (X, d). On dit que $x \in X$ est valeur d'adhérence de (x_n) si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N \geq 0$, $\exists n \geq N$ avec $x_n \in B(x, \epsilon)$. C'est équivalent à dire qu'il existe une sous-suite extraite de (x_n) qui converge vers x.

Théorème

Une partie A de l'espace métrique X est ouverte ssi pour toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers un élément de A, $\exists N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$, on a $x_n \in A$

en général

notation : boule fermée $\bar{B}(a,r) \neq \overline{B(a,r)}$

Théorème

Une partie A de l'espace métrique X est fermée ssi pour toute suite (x_n) convergente d'éléments de A, la limite est dans A

clôture ou fermeture

Définition

Soit A une partie de l'espace métrique X. L'intérieur de A, noté A°, est le plus grand ouvert contenu dans A. L'adhérence de A, noté $\bar{A}$, est le plus petit fermé contenant A. A est dense dans X si $\bar{A} = X$. La frontière de A, noté δA, est $\delta A = \bar{A} \setminus A^\circ$

$Fr(A)$

Résultat. On a $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$; $A^\circ = A$ ssi A est ouvert ; $\bar{A} = A$ ssi A est fermé.

$x \in \bar{A}$ $\quad U = B(x, 1/n)$

$a_n \in U \cap A$

Théorème

On a $x \in \bar{A}$ ssi $\forall U$ ouvert contenant x, $U \cap A \neq \emptyset$ ssi il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Définition

Pour $p \in [1, +\infty[$, on définit la norme $\| \cdot \|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$p \in \mathbb{R}$

normes L_p

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$p = 2$

$\|x\|_2 = \|x\| = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

↑ norme euclidienne

et la norme $\| \cdot \|_\infty$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

Résultat. L'inégalité triangulaire pour ces normes est l'inégalité de Minkowski

Théorème

Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Les normes $\| \cdot \|_p$ et $\| \cdot \|_q$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire il existe $m, M > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, m \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq M \|x\|_p$$

$M = C$

$C > 1$

$m = 1/C$

et donc les distances correspondantes sont Lipschitz-équivalentes

Normes sur ℓ^2

On note

$$\boxed{\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 < \infty \right\}}$$

et pour $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, on pose

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n)^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\ell^2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.
3. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?
   (Indication. considérer la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ définie par : $x_k(n) = 1$ si $n \leq k$ et $x_k(n) = 0$ sinon.)

Normes sur $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$

On note $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $A = \{f \in E : f(0) = 0\}$. On rappelle la définition des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sur E :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} \|f(x)\|, \quad |f|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

1. Montrer que A est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Soit $f \in E$. On définit pour tout $n \geq 1$,

$$f_n : [0;1] \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} f(1/n)\, nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

   2.1 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in A$.
   2.2 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n}\|f\|_\infty.$$

3. Montrer que A est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Déterminer l'intérieur de A pour $\|\cdot\|_\infty$ puis pour $\|\cdot\|_1$.

§1.2 Fonctions continues

espaces métriques

Définition

Une fonction $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x' \in X, \; d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

f est continue sur $A \subseteq X$ si f est continue en x pour tout $x \in A$

f est uniformément continue sur $A \subseteq X$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in A, \; d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$$

$\forall x, \forall \epsilon, \exists \delta \ldots$

Remarque

Définition de continuité : $\delta = \delta_{x,\epsilon}$
Définition de continuité uniforme : $\delta = \delta_\epsilon$ ← ne dépend pas de x

Définition

Soit $K > 0$. Une fonction $f : X \to Y$ est K-lipschitzienne $\in X$ si

$$\forall x, x' \in X, \; d_Y(f(x), f(x')) \leq K \, d_X(x, x')$$

Résultat. Lipschitzienne $\implies$ uniformément continue $\implies$ continue

Théorème (Autre caractérisation de la continuité)

Soit $f : X \to Y$.

- *f est continue en $x \in X$ ssi pour tout suite (x_n) suite d'éléments de X de limite x, on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$ (caractérisation séquentielle)*
- *f est continue sur X ssi pour tout ouvert U de Y, on a $f^{-1}(U)$ ouvert de X (caractérisation topologique)*

  Remarque. vérifier pour U dans une base d'ouverts de Y est suffisant

$$f^{-1}\left(\bigcup_i U_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(U_i)$$

Résultat. La composée, la somme, la multiplication de fonctions continues est continue

exo.

Résultat. Deux fonctions continues qui coïncident sur un ensemble dense sont égales

A dense dans E $x \in E$, $\exists (a_n)$ d'elts de A avec $a_n \to x$

f, g continues et $f|_A = g|_A$ alors $f(x) = \lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(x)$

Théorème

Soit $f : X \to Y \times Z$ (avec le distance d_∞). On note $f = (f_Y, f_Z)$. Alors f est continue ssi f_Y et f_Z sont continues

Définition

$a \in X$

Soient $f : X \to Y$, $\cancel{A \subseteq X}$, $\cancel{a \in \bar{A}}$ et $b \in Y$. On dit que f tend vers b quand x tend vers a ou la limite de f en a est b, noté $\lim_{x \to a} f(x) = b$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \cancel{A},\ \underbrace{0 <}_{\hookrightarrow\ x \neq a} d_X(x, a) < \delta \implies \overset{x \neq a}{d_Y}(f(x), b) < \epsilon$$

Résultat. On a $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ssi $\lim_{n} f(x_n) = b$ pour tout suite (x_n) de limite a avec $\boxed{x_n \neq a}\ \forall n$

Résultat. f est continue en a ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Théorème (Prolongement par continuité)

Soit $A \subseteq X$ et $f : A \to Y$. Soit $c \in \bar{A} \setminus A$ tel que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe. On définit $g : A \cup \{c\} \to Y$ par

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A \quad \text{et} \quad g(c) = \lim_{x \to c} f(x).$$

Alors, g est continue en c.

Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions de X vers Y et soit $f : X \to Y$.

- (f_n) converge simplement vers f si $\forall x \in X$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$, ie

  $$\boxed{\forall x \in X}, \forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

  $\hookrightarrow N = N(x, \varepsilon)$

- (f_n) converge uniformément vers f si

  $$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \text{ tel que } \boxed{\forall x \in X} \forall n \geq N,\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

  $\hookrightarrow N = N(\varepsilon)$

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de X vers Y qui converge uniformément vers $f : X \to Y$. Alors, f est continue.

Théorème

Soit $f : X \to Y$ une application linéaire entre deux evn (espaces vectoriels normés) alors f est continue ssi f est continue en 0 ssi f est lipschitzienne ssi $\exists M > 0, \forall x \in X, \|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.

Dans ce cas, le plus petit M qui convient est la norme subordonnée de f, dénotée $|||f|||$.

X, Y evn $\qquad \forall x \quad \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq M$

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ (= ensemble des applications linéaires continues), on a

- $\forall x \in X, \ \|f(x)\|_Y \leq |||f||| \cdot \|x\|_X$ ← par définition
- $$|||f||| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \boxed{\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|f(x)\|_Y} = \boxed{\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|f(x)\|_Y}$$
- *Soit $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$, on a $|||g \circ f||| \leq |||g|||\ |||f|||$*

Résultat. $\mathcal{L}(X, Y)$ avec la norme $|||\cdot|||$ est un evn

Définition

Un homéomorphisme entre deux espaces métriques $f : X \to Y$ est une bijection telle que f et f^{-1} sont continues. Dans ce cas, on dit que X et Y sont homéomorphes.

Limite pour une distance particulière

Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = |x-y|$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Montrer que l'application $\delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

   est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n \geq 1}$ pour cette distance.

Calcul de normes d'applications linéaires.

1. On considère l'application linéaire $\phi : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(u) = \int_0^1 x\, u(x)\, dx.$$

   Calculer la norme de ϕ pour $\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

   Même question avec la norme $\|\cdot\|_1$.

2. On considère l'application linéaire $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(P) = P'(0).$$

   Calculer la norme de ψ pour $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0;1]} |P(x)|$.

§1.3 Compacité

Définition

Soit (X, d) un espace métrique.

- Propriété de Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_{i\in I}$ des ouverts de X tels que $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ (recouvrement d'ouverts), il existe $I_0 \subseteq I$ fini tel que $\bigcup_{i\in I_0} U_i = X$.
- Propriété de Bolzano-Weierstrass. Tout suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.

Théorème

Ces deux propriétés sont équivalentes pour un espace métrique. Un espace avec ces propriétés est un espace compact

Résultat. Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés

Résultat. Soit X un espace compact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'ouverts de X. Alors il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\exists i \in I$ avec $B(x, r) \subseteq U_i$

lemme de la

Maille

Proposition

- *Un sous-espace compact d'un espace métrique est fermé*
- *Une intersection arbitraire de compacts est compacte*
- *Une union finie de compacts est compacte*
- *Un fermé d'un espace compact est compact*

Espace compact : fermé = compact

Théorème

1. **Borne atteinte.** *Soit X compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes. De plus, f est uniformément continue (aussi vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par Y métrique).*
2. **Riesz.** *Soit E un evn. Alors, E est de dimension finie ssi $B_f(0,1)$ est compacte.*
3. **Produit de compacts**. *Le produit de deux espaces compacts avec la distance produit est un espace compact*

Proposition

Soit $n \geq 1$, alors toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ (resp. sur $\mathbb{C}^n$) sont équivalentes