Mesure et intégration

1. Tribus et boréliens
2. Mesures
3. Fonctions mesurables
4. Intégrales
5. Les grands théorèmes
6. Mesures produit
7. Changements de variables

§1 Tribus et boréliens

X un ensemble

Définition

Un clan de X est un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X tel que

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$ $\quad$ $X \in C$
2. Si $A \in \mathcal{C}$ alors $A^c \in \mathcal{C}$ $\quad (A^c = X \setminus A)$
3. $\mathcal{C}$ stable par union finie

Une tribu est un clan aussi stable par union dénombrable.

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X et soit $Y \subseteq X$. Alors $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu de Y (idem pour un clan). C'est la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur Y.

Soit $\mathcal{T}$ une tribu fixée de X. Une partie A de X est mesurable si $A \in \mathcal{T}$.

Proposition

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X alors

- $X \in \mathcal{T}$
- *$\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable*
- *Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{T}$*

$M_i \in T \Rightarrow M_i^c \in T \ \forall i$

$i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_i M_i^c \in T$

$\Rightarrow \left(\bigcup_i M_i^c\right)^c \in T$

$= \bigcap_i M_i$

Définition

Une classe monotone $\mathcal{M}$ de X est un ensemble de parties de X tel que pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{M}$

- Si (A_n) est une suite croissante (ie $A_n \subseteq A_{n+1}$) alors $\cup A_n \in \mathcal{M}$ $= \lim A_n$
- Si (A_n) est une suite décroissante (ie $A_{n+1} \subseteq A_n$) alors $\cap_n A_n \in \mathcal{M}$ $\lim A_n$

Résultat. $\overbrace{\text{Clan} + \text{classe monotone}}^{T} \implies$ tribu

$M_i \in$ Clan $\quad M_j = \bigcup_{i \leq j} M_i \in$ Clan $\quad (M_j)$ croissante $\Rightarrow \bigcup M_j \in T$ (C.M)

Définition

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$? (parties de X). Alors il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, on l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, dénotée $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. (De même pour clan et classe monotone dénotés $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ respectivement)

Résultat. On a $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$

Théorème (Classe monotone)

Soit $\mathcal{C}$ un clan, alors $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$ (et donc c'est une tribu)

↳ tribu

m mesurable ssi $m \in$ tribu

Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} \text{ avec } A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Définition

Soit X un espace métrique, la tribu des boréliens de X, dénotée $\mathcal{B}_X$, est la tribu engendrée par les ouverts de X. Les éléments de cette tribu sont les boréliens de X.

Résultat. Soit Y sous-espace métrique de X alors $\mathcal{B}_Y$ est la tribu de Y induite par $\mathcal{B}_X$ sur Y

Résultat. Les intervalles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$

Proposition

Soit X espace métrique. On a

- $\mathcal{B}_X$ *est la tribu engendré par les fermés de X*
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *est la tribu engendré par les intervalles de $\mathbb{R}$ et même uniquement les intervalles de la forme $]a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$*
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ *est la tribu engendré par les pavés $I_1 \times \cdots \times I_n$ avec I_j intervalle ouvert de $\mathbb{R}$*

Remarque. Quand X est un espace métrique, la tribu considérée sur X est par défaut la tribu des boréliens

tribu

§2 Mesures

$(X, \mathcal{T})$ espace mesurable

Définition

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X. Une mesure (~~positive~~) sur X est une application $\mu : \mathcal{T} \to [0; +\infty]$ telle que

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ d.d.d. (deux à deux disjoints) alors $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$ (propriété de σ-additivité)

$\forall n \neq m,\ A_n \cap A_m = \emptyset$

↳ possiblement $+\infty$

Exemple

On prend $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \textit{si } A \textit{ est finie} \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

C'est la mesure de comptage

Définition

Une espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{T}$ tribu de X et un espace mesuré est un triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ avec, de plus, μ une mesure sur $\mathcal{T}$

$A_1 = A$ $\quad A_n = 0 \quad n \geq 2$

$A_2 = B \setminus A$ $\quad \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Proposition

ex

- *Soient A et B deux mesurables avec $A \subseteq B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonie). Si, de plus, $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$*
- *Soient $A_1, \ldots A_k$ des mesurables, alors $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$ avec égalité si les A_i sont d.d.d. (deux à deux disjoints)*
- *Soient A et B deux mesurables alors*

apd

$$\boxed{\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)}$$

si $\mu(A \cup B) < +\infty$

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

- *Soit (A_n) une suite de mesurables*
  - *Alors $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$ (sous-additivité)*
  - *Si $(A_n) \nearrow A$ alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$*
  - *Si $(A_n) \searrow A$ et $\mu(A_0) < \infty$ alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$*

$A_n \subseteq A_{n+1}$ et $\bigcup_n A_n = A$

$A_{n+1} \subseteq A_n$ et $\bigcap_n A_n = A$

Définition

- La mesure μ est finie si $\mu(X) < +\infty$ $\Rightarrow \forall A$ mesurable $\mu(A) < +\infty$
- La mesure μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) de mesurables avec
$$\cup_n A_n = X \quad \text{et} \quad \mu(A_n) < +\infty \ \forall n$$
- La mesure μ est une mesure de probabilité si $\mu(X) = 1$
- Si X est métrique et $\mathcal{T}$ est la tribu des boréliens, la mesure μ est borélienne
- Si $X = \mathbb{R}^n$ alors μ est une mesure de Radon si μ est borélienne et $\forall K$ compact de X, $\mu(K) < +\infty$

Définition

Un partie A de X (non nécessairement mesurable) est négligeable s'il existe un mesurable B avec $A \subseteq B$ et $\mu(B) = 0$. Une mesure est complète si toutes les parties négligeables sont mesurables. Si ce n'est pas le cas, on peut construire une extension de μ en une (unique) mesure complète $\bar{\mu}$ en ajoutant les négligeables à $\mathcal{T}$ pour obtenir la tribu complétée $\bar{\mathcal{T}}$.

Une propriété $P(x)$ définie pour $x \in X$ est vraie presque partout ou vraie p.p. si l'ensemble $\{x \in X : P(x) \text{ est faux}\}$ est négligeable. de mesure nulle

Théorème

Il existe une unique mesure ν_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que, pour chaque pavé $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ avec I_j intervalle, on a

$\lambda_1([a;b]) = b-a$

$$\nu_n(P) = \mathrm{vol}(P) = \text{produit des longueurs de } I_j$$

On note λ_n la complétée de ν_n et on l'appelle la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{L}_n$ la complétée de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ pour cette mesure et on l'appelle la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

$\lambda_2([a;b] \times [c;d]) = (b-a) \times (d-c)$

On a les propriétés suivantes

- *ν_n est unique*
- *ν_n est une mesure de Radon et est σ-finie*
- *ν_n est invariante par translation, $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ $\nu_n(x + A) = \nu_n(A)$*

  $x+A = \{x+a : a \in A\}$
- *ν_1 est donnée par la formule suivante pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*

$$\nu_1(A) = \inf\left\{\sum_j (b_j - a_j) : A \subseteq \bigcup_j]a_j, b_j[\right\}$$

$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$ et $\lambda_1([n; n+1[) = 1 < +\infty$

$n \in \mathbb{Z}$

Le but de cet exercice est d'aboutir à l'existence d'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est pas Lebesgue-mesurable. En particulier, A n'est pas borélienne.

1. Soit B une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $b \in B$ tel que $x - b \in \mathbb{Q}$. Montrer que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) > 0$.

2. Soit B une partie de $[0, 1]$ telle que $\forall x, y \in B,\ x \neq y \implies x - y \notin \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de translatés de B inclus dans $[0, 2]$ et deux à deux disjoints. En déduire que si B est Lebesgue-mesurable alors $\lambda(B) = 0$.

3. Que peut-on dire d'une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés ci-dessus ? De quelle façon peut-on obtenir une telle partie de $\mathbb{R}$?

§3 Fonctions mesurables et intégrales

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable.

Définition

Une fonction étagée est une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ de la forme

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $k \geq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\boxed{A_i \in \mathcal{T}}$ et χ_A est la fonction caractéristique de A

Une fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est mesurable si elle est la limite (simple) de fonctions étagées. Si X métrique et $\mathcal{T}$ tribu des boréliens, on dit que f est borélienne

On dit que la fonction $f : X \to \mathbb{R}^n$ donnée par $f = (f_1, \cdots f_n)$ est mesurable si chaque f_i est mesurable

Résultat. Si f est mesurable et positive, on peut trouver une suite croissante de fonctions étagées de limite f

Remarque. Convention de calcul : $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ donc le produit est toujours défini dans $\bar{\mathbb{R}}$ (mais pas la somme)

$a + \infty = +\infty$ ...

non défini

Définition

Soit A une partie de X et $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f est mesurable si A est mesurable et si $f\chi_A$ ($= f$ étendue à X par 0 sur A^c) est mesurable

Résultat. La fonction χ_A est mesurable ssi A est mesurable

Théorème

Soit A un mesurable de X. La fonction $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable ssi on a : $f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{T}$ et, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

mesurables

Proposition

- *Si X est métrique alors les fonctions continues sont boréliennes*
- *Une limite simple de fonctions mesurables est mesurable*
- *Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ borélienne et $f : X \to \mathbb{R}^n$ mesurable alors $g \circ f$ mesurable*
- *Soient $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurables alors fg est mesurable, λf est mesurable ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $f + g$ mesurable là où elle est définie*

Proposition

- *Soient $f_1, \ldots, f_n$ mesurables alors* $\max(f_1, \ldots, f_n)$ *et* $\min(f_1, \ldots, f_n)$ *sont mesurables*
- *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables alors* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ *et* $\liminf f_n$ *sont mesurables*

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \textit{la suite } (f_n(x)) \textit{ converge dans } \bar{\mathbb{R}}\}.$$

.

Alors la partie A est mesurable et la fonction $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par $f(x) = \lim_n f_n(x)$ est mesurable

Exercice. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Démontrer que l'ensemble des points $x \in X$ tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite est un ensemble mesurable.
Indication : On rappelle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x, n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

ne dépend pas de x

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré.

Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables.

- (f_n) est de Cauchy en mesure si, $\forall \epsilon > 0$
$$\lim_{m,n} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$
- (f_n) est de Cauchy presque uniformément si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) < \epsilon$ et (f_n) de Cauchy uniforme sur $X \setminus A$

Soit f mesurable.

- $f_n \to f$ en mesure si, $\forall \epsilon > 0$,
$$\lim_{n} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$
- $f_n \to f$ presque uniformément si, $\forall \epsilon > 0$, $\exists A \in \mathcal{T}$ avec $\mu(A) < \epsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $X \setminus A$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-mesurable. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un borélien $B \subseteq [0,1]$ tel que $\nu_1(B) < \epsilon$ et la restriction de f à $[0,1] \setminus B$ est continue.

1. Soient F et G deux fermés non vides et disjoints d'un espace métrique (X, d). Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{d(x,G)}{d(x,F) + d(x,G)}$$

   est une fonction continue sur X qui vaut 1 sur F et 0 sur G.
   (On rappelle que $d(x,A)$ est la plus petite distance entre x et les points de A)

2. Soit A un Lebesgue-mesurable. On admet le résultat suivant : il existe F fermé et U ouvert tels que $F \subseteq A \subseteq U$ et $\nu_1(U \setminus F) < \epsilon$. En déduire le résultat pour f la fonction caractéristique de A.

3. Montrer le résultat pour f une fonction étagée.

4. En utilisant le résultat suivant, déduire des questions précédentes le résultat en général :

   Théorème d'Egoroff. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit (f_n) une suite de fonctions qui tend simplement vers f. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{T}$ avec $\mu(A) \leq \epsilon$ et (f_n) converge unif. vers f sur $X \setminus A$.

§4 Intégrales

$a\chi_A + a\chi_B = a\chi_{A\cup B}$

$A\cap B = C$

$a\chi_A + b\chi_B = a\chi_{A\setminus C} + b\chi_{B\setminus C} + (a+b)\chi_C$

Définition

Soit une fonction étagée $f : X \to \mathbb{R}$ de représentation $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$. On dit que la représentation est admissible si $\forall i\ a_i \geq 0$ (et donc $f \geq 0$). Elle est canonique si les a_i sont deux à deux distincts et les A_i sont d.d.d.

Résultat. Une fonction étagée admet une unique représentation canonique (à l'ordre près) et elle est admissible ssi $f \geq 0$.

Définition

Soit f étagée et positive de représentation canonique $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$, on définit l'intégale de f sur X par rapport à μ par

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu = \boxed{\int f} = \sum_i a_i \mu(A_i) \in [0;\infty]$$

Résultat. Si f étagée et positive de représentation admissible $f = \sum_i b_i \chi_{B_i}$ alors on a $\int f = \sum_i b_i \mu(B_i)$

Définition

Soit $f : X \to [0; +\infty]$ mesurable. On définit l'intégale de f sur X par rapport à μ par

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu = \int f = \sup\left\{ \int u : u \text{ étagée, positive et } u \leq f \right\}$$

On dit que f est intégrable si $\int f$ est finie.
Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable, on dit que f a un intégrale si $\int f_+ - \int f_-$ a un sens où $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = max(-f, 0)$ sont mesurables, positives telles que $f = f_+ - f_-$. Dans ce cas, on pose

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu \in \bar{\mathbb{R}}$$

On dit que f est intégrable si f_+ et f_- sont intégrables. On note $\mathcal{L}^1(X; \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables

Remarque. f intégrable $\iff$ f a une intégrale finie $\iff$ $\int f_+ < +\infty$ et $\int f_- < +\infty$ $\iff$ $\int |f| < +\infty$

$\int f_+ + \int f_- < +\infty$

Proposition

Soient f et g mesurables ayant une intégrale.

- *Si $f \leq g$ alors $\int f \leq \int g$*
- *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\int (f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$*

$\int \chi_A$ mesurable

Définition

Soit $A \subseteq X$ mesurable et $f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable. On dit que f a une intégrale si $f\chi_A$ (= extension de f à X en prenant 0 sur A^c) a une intégrale. On pose

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f\chi_A \, d\mu$$

Résultat. Si A est négligeable alors $\forall f : A \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable, on a $\int_A f = 0$. De même, si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mesurable et $f = 0$ p.p. alors $\int f = 0$.

Exercice. Soient (X, μ) un espace mesuré et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction μ-intégrable.

1. Montrer que f est finie μ-presque partout.
2. Montrer que si $\int_X |f| \mathrm{d}\mu = 0$ alors f est nulle μ-presque partout.

à faire

Résultat. Soit f mesurable alors f a une intégrale pour μ ssi f a une intégrale pour $\bar{\mu}$ et, dans ce cas, les deux sont égales.

Résultat. Soient f, g mesurables et $f = g$ p.p. f a une intégrale ~~alors~~ ssi g a une intégrale et, dans ce cas, les deux sont égales.

Proposition

Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ intégrable. On pose $A = f^{-1}(\{\pm\infty\})$. Alors $\mu(A) = 0$. On pose $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \notin A$ et $g(x) = 0$. Alors $\int |f - g| = 0$ et donc $\int f = \int g$.

$\hookrightarrow$ $f = g$ pp

Remarque. Il suit qu'on peut toujours modifier f intégrable pour qu'elle ne prenne que des valeurs finies sans changer son intégrale.

Définition

Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ mesurable. f est intégrable ssi chaque f_i est intégrable et $\int f = (\int f_i)_i$. En particulier, si $f : X \to \mathbb{C}$ alors $\int f = \int \mathrm{Re}(f) + i \int \mathrm{Im}(f)$

$\forall x \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$

Théorème (Beppo-Levi)

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. On suppose que (f_n) est convergente. Alors, on a $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Résultat. Si f et g ont une intégrale et les sommes $f+g$ et $\int f + \int g$ existent. Alors, $f+g$ a une intégrale et $\boxed{\int (f+g) = \int f + \int g.}$ ← exo.

Proposition

- *Si f mesurable alors $|f|$ mesurable*
- *Si f a une intégrale alors $|\int f| \leq \int |f|$*

très utile

- *Si f mesurable et g intégrable avec $\boxed{|f| \leq g}$ alors f intégrable*
- *Si f intégrable et $\int |f| = 0$ alors $f = 0$ p.p.*
- *Si f et g intégrables, $f \leq g$ et $\int f = \int g$ alors $f = g$ p.p.* ← exo.

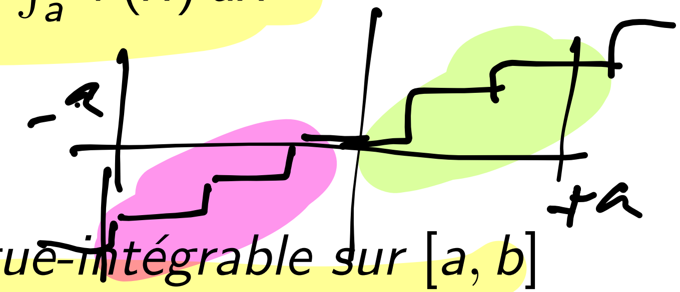
Proposition (Inégalité de Markov)

Soit f mesurable. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $t > 0$. Alors

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p$$

mesurable

Notation. L'intégrale de Riemann est dénotée par $\int_a^b f(x)\,dx$



Riemann Lebesgue

Théorème

- *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors f est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\nu_1$*
- *Dans le cas $f : I \to \mathbb{R}$ continue avec I non compact d'extrémités $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$*
  - *f est Lebesgue-intégrable ssi l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge absolument et dans ce cas $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*

    $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$
  - *Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*
  - *Si $\int_I f\,d\nu_1$ existe alors on a $\int_a^b f(x)\,dx = \int_I f\,d\nu_1$*

Remarque. Dans le cas I non compact d'extrémités $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$, il est possible que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe mais pas $\int_I f\,d\nu_1$

Notation. Pour $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, on notera parfois $\int_I f(x)\,dx$ plutôt que $\int_I f\,d\nu_1$ (s'il n'y a pas de risque de confusion)

Théorème (Critère de Lebesgue)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ ssi f est bornée et l'ensemble des discontinuités de f est ν_1-négligeable.

Résultat. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable alors f est Lebesgue-intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\nu_1$.

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable. On pose $F(x) = \int_{[a,x]} f\,d\nu_1$. Alors F est dérivable ν_1-p.p. et pour $F'(x) = f(x)$ ν_1-p.p.

Théorème (Leibniz-Newton pour l'intégrale de Lebesgue)

Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ avec F' ν_1-intégrable. Alors, $\forall x \in [a,b]$, $F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t)\,d\nu_1(t)$.

Remarque. Ce résultat n'est pas forcément vraie si on suppose juste F dérivable ν_1-p.p (exemple : $F(x) = 0$ sur $[0,1/2]$ et $= 1$ sur $]1/2,1]$) et même avec F continue (on peut construire F continue avec $F' = 0$ p.p.)

non constante

On considère la fonction $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2(x) & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est Lebesgue-intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer l'intégrale de Lebesgue $\int_{[0;\pi/2]} f(x)\, d\nu_1(x)$.

.

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \searrow 0} xf(x)$.

§5 Les grands théorèmes

Théorème (Lemme de Fatou)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables* ≥ 0, *alors* $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

Théorème (Convergence dominée)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables avec* $f_n \to f$ *et telle qu'il existe* g *intégrable avec* $\forall n$, $|f_n| \leq g$. *Alors* f *est intégrable et* $\int |f_n - f| \to 0$ *et donc* $\int \lim f_n = \lim \int f_n$.

même fonction $\forall n$

Proposition (Réciproque de la convergence dominée)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables et* f *mesurable tels que* $\int |f_n - f| \to 0$. *Alors il existe une suite extraite* (f_{n_k}) *et une fonction intégrable* g *tels que* $\forall k$, $|f_{n_k}| \leq g$ *et* $f_{n_k} \to f$ *p.p.*

Théorème (Convergence dominée p.p.)

Soit (f_n) *suite de fonctions mesurables telle qu'il existe* g *intégrable avec* $\forall n$, $|f_n| \leq g$ *p.p et il existe* f *mesurable avec* $f_n \to f$ *p.p. Alors* f *intégrable,* $\int |f_n - f| \to 0$ *et* $\int f_n \to \int f$.

Intégrales dépendant d'un paramètre

Notation. $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$ (avec $\Lambda \subseteq Y$ espace métrique). Pour $\lambda \in \Lambda$, $f(\cdot, \lambda) : X \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x, \lambda)$. De même avec $f(x, \cdot)$ pour $x \in X$.

$\Lambda \to \mathbb{R}$

Théorème

Supposons que

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f(\cdot, \lambda)$ est mesurable*
2. *Pour presque tout $x \in X$, $f(x, \cdot)$ est continue* en d
3. *Il existe $g : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle, $\forall \lambda \in \Lambda$, $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

Alors $F : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int f(x, \lambda)\, d\mu$ est continue.

$d\mu(x)$

Proposition

Dans le cas où Λ est un ouvert de $Y = \mathbb{R}^n$, on peut remplacer la condition 3 par

3'. *Pour toute boule fermée $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$, il existe une fonction intégrable g telle que $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$, $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

On suppose Λ ouvert de $Y = \mathbb{R}^n$. Pour la variable $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda$, on dénote par $\boxed{\partial_j = \frac{\partial}{\partial \lambda_j}}$ la dérivée partielle

Théorème

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que

1. *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot, \lambda)$ est intégrable*
   Donc la fonction $\boxed{F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda)\, d\mu}$ existe
2. *Pour tout $x \in X$, la fonction $\partial_j f(x, \cdot)$ existe*
3. *Pour toute boule fermée $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$, il existe une fonction intégrable g telle que $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$, $|\partial_j f(\cdot, \lambda)| \leq g$ p.p.*

Alors $\partial_j F$ existe et $\partial_j F(\lambda) = \int \partial_j f(\cdot, \lambda)\, d\mu$

Théorème

Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables telles que $\sum_n \int |f_n| < +\infty$. Alors $\sum_n f_n(x)$ converge p.p. et $\sum_n \int f_n = \int f$ avec

$$f(x) = \begin{cases} \sum_n f_n(x) & \text{si la série converge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$