Mesure et intégration

1. Tribus et boréliens
2. Mesures
3. Fonctions mesurables
4. Intégrales
5. Les grands théorèmes
6. Mesures produit
7. Changements de variables

§1 Tribus et boréliens

X un ensemble

Définition

Un clan de X est un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X tel que

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$ $\quad X \in C$
2. Si $A \in \mathcal{C}$ alors $A^c \in \mathcal{C}$ $\quad (A^c = X \setminus A)$
3. $\mathcal{C}$ stable par union finie

Une tribu est un clan aussi stable par union dénombrable.

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X et soit $Y \subseteq X$. Alors $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$ est une tribu de Y (idem pour un clan). C'est la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur Y.

Soit $\mathcal{T}$ une tribu fixée de X. Une partie A de X est mesurable si $A \in \mathcal{T}$.

Proposition

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X alors

- $X \in \mathcal{T}$
- *$\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrable*
- *Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{T}$*

$M_i \in T \Rightarrow M_i^c \in T \ \forall i$

$i \in \mathbb{N}$ $\quad \Rightarrow \bigcup_i M_i^c \in T$

$\Rightarrow \left(\bigcup_i M_i^c\right)^c \in T$

$= \bigcap_i M_i$

Définition

Une classe monotone $\mathcal{M}$ de X est un ensemble de parties de X tel que pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{M}$

$= \lim A_n$

- Si (A_n) est une suite croissante (ie $A_n \subseteq A_{n+1}$) alors $\cup A_n \in \mathcal{M}$
- Si (A_n) est une suite décroissante (ie $A_{n+1} \subseteq A_n$) alors $\cap A_n \in \mathcal{M}$

$\lim_n A_n$

Résultat. $\underbrace{\text{Clan} + \text{classe monotone}}_{T} \implies$ tribu

$M_i \in$ Clan $\quad N_j = \bigcup_{i \leq j} M_i \in$ Clan $\quad (N_j)$ croissante $\Rightarrow \bigcup N_j \in T$ (C.M)

Définition

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$?. Alors il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$, on l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{A}$, dénotée $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. (De même pour clan et classe monotone dénotés $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ respectivement)

Résultat. On a $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$

parties de X

Théorème (Classe monotone)

Soit $\mathcal{C}$ un clan, alors $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$ (et donc c'est une tribu)

↳ tribu

m mesurable ssi m ∈ tribu

Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} = \{A \subseteq \mathbb{R} \text{ avec } A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.
2. Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Définition

Soit X un espace métrique, la tribu des boréliens de X, dénotée $\mathcal{B}_X$, est la tribu engendrée par les ouverts de X. Les éléments de cette tribu sont les boréliens de X.

Résultat. Soit Y sous-espace métrique de X alors $\mathcal{B}_Y$ est la tribu de Y induite par $\mathcal{B}_X$ sur Y

Résultat. Les intervalles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$

Proposition

Soit X espace métrique. On a

- $\mathcal{B}_X$ *est la tribu engendré par les fermés de X*
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *est la tribu engendré par les intervalles de $\mathbb{R}$ et même uniquement les intervalles de la forme $]a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$*
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ *est la tribu engendré par les pavés $I_1 \times \cdots \times I_n$ avec I_j intervalle ouvert de $\mathbb{R}$*

Remarque. Quand X est un espace métrique, la tribu considérée sur X est par défaut la tribu des boréliens

tribu

§2 Mesures

$(X, \mathcal{T})$ espace mesurable

Définition

Soit $\mathcal{T}$ une tribu de X. Une mesure (~~positive~~) sur X est une application $\mu : \mathcal{T} \to [0; +\infty]$ telle que

$\forall n \neq m,\ A_n \cap A_m = \emptyset$

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ d.d.d. (deux à deux disjoints) alors $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$ (propriété de σ-additivité)

↳ possiblement $+\infty$

Exemple

On prend $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathrm{card}(A) & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la mesure de comptage

Définition

Une espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{T}$ tribu de X et un espace mesuré est un triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ avec, de plus, μ une mesure sur $\mathcal{T}$

$A_1 = A \quad A_n = 0 \quad n \geq 2$

$A_2 = B \setminus A \quad \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Proposition

exo

- *Soient A et B deux mesurables avec $A \subseteq B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonie). Si, de plus, $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$*
- *Soient $A_1, \ldots A_k$ des mesurables, alors $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$ avec égalité si les A_i sont d.d.d. (deux à deux disjoints)*
- *Soient A et B deux mesurables alors*

apd

$$\boxed{\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)}$$

si $\mu(A \cup B) < +\infty$

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

- *Soit (A_n) une suite de mesurables*
  - *Alors $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$ (sous-additivité)*
  - *Si $(A_n) \nearrow A$ alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$*
  - *Si $(A_n) \searrow A$ et $\mu(A_0) < \infty$ alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$*

$A_n \subseteq A_{n+1}$ et $\bigcup_n A_n = A$

$A_{n+1} \subseteq A_n$ et $\bigcap_n A_n = A$

Définition

$\Rightarrow \forall A$ mesurable $\mu(A) < +\infty$

- La mesure μ est finie si $\mu(X) < +\infty$
- La mesure μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) de mesurables avec
$$\cup_n A_n = X \quad \text{et} \quad \mu(A_n) < +\infty \ \forall n$$
- La mesure μ est une mesure de probabilité si $\mu(X) = 1$
- Si X est métrique et $\mathcal{T}$ est la tribu des boréliens, la mesure μ est borélienne
- Si $X = \mathbb{R}^n$ alors μ est une mesure de Radon si μ est borélienne et $\forall K$ compact de X, $\mu(K) < +\infty$

Définition

Un partie A de X (non nécessairement mesurable) est négligeable s'il existe un mesurable B avec $A \subseteq B$ et $\mu(B) = 0$. Une mesure est complète si toutes les parties négligeables sont mesurables. Si ce n'est pas le cas, on peut construire une extension de μ en une (unique) mesure complète $\bar{\mu}$ en ajoutant les négligeables à $\mathcal{T}$ pour obtenir la tribu complétée $\bar{\mathcal{T}}$.

Une propriété $P(x)$ définie pour $x \in X$ est vraie presque partout ou vraie p.p. si l'ensemble $\{x \in X : P(x) \text{ est faux}\}$ est négligeable.

de mesure nulle

Théorème

Il existe une unique mesure ν_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que, pour chaque pavé $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ avec I_j intervalle, on a

$\nu_1([a;b]) = b-a$

$$\nu_n(P) = \mathrm{vol}(P) = \textit{produit des longueurs de } I_j$$

On note λ_n la complétée de ν_n et on l'appelle la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{L}_n$ la complétée de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ pour cette mesure et on l'appelle la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

$\nu_2([a,b] \times [c,d]) = (b-a) \times (d-c)$

On a les propriétés suivantes

- *ν_n est unique*
- *ν_n est une mesure de Radon et est σ-finie*
- *ν_n est invariante par translation, $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ $\nu_n(x + A) = \nu_n(A)$*

  $x + A = \{x + a : a \in A\}$
- *ν_1 est donnée par la formule suivante pour $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*

$$\nu_1(A) = \inf \left\{ \sum_j (b_j - a_j) : A \subseteq \bigcup_j]a_j, b_j[\right\}$$

$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$ et $\lambda_1([n; n+1[) = 1 < +\infty$