

# Mesure et intégration

1. Tribus et boréliens
2. Mesures
3. Fonctions mesurables
4. Intégrales
5. Les grands théorèmes
6. Mesures produit
7. Changements de variables

## §1 Tribus et boréliens

$X$  un ensemble

### Définition

Un **clan** de  $X$  est un ensemble  $\mathcal{C}$  de parties de  $X$  tel que

1.  $\emptyset \in \mathcal{C}$
2. Si  $A \in \mathcal{C}$  alors  $A^c \in \mathcal{C}$  ( $A^c = X \setminus A$ )
3.  $\mathcal{C}$  stable par union finie

Une **tribu** est un clan aussi stable par union dénombrable.

Soit  $\mathcal{T}$  une tribu de  $X$  et soit  $Y \subseteq X$ . Alors  $\mathcal{T}_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$  est une tribu de  $Y$  (idem pour un clan). C'est la **tribu induite** par  $\mathcal{T}$  sur  $Y$ .

Soit  $\mathcal{T}$  une tribu fixée de  $X$ . Une partie  $A$  de  $X$  est **mesurable** si  $A \in \mathcal{T}$ .

### Proposition

Soit  $\mathcal{T}$  une tribu de  $X$  alors

- ▶  $X \in \mathcal{T}$
- ▶  $\mathcal{T}$  est stable par intersection dénombrable
- ▶ Si  $A, B \in \mathcal{T}$ , alors  $A \setminus B \in \mathcal{T}$

## Définition

Une **classe monotone**  $\mathcal{M}$  de  $X$  est un ensemble de parties de  $X$  tel que pour toute suite  $(A_n)$  d'éléments de  $\mathcal{M}$

- ▶ Si  $(A_n)$  est une suite croissante (ie  $A_n \subseteq A_{n+1}$ ) alors  $\cup A_n \in \mathcal{M}$
- ▶ Si  $(A_n)$  est une suite décroissante (ie  $A_{n+1} \subseteq A_n$ ) alors  $\cap A_n \in \mathcal{M}$

**Résultat.** Clan + classe monotone  $\implies$  tribu

## Définition

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Alors il existe une plus petite tribu contenant  $\mathcal{A}$ , on l'appelle la **tribu engendrée par  $\mathcal{A}$** , dénotée  $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ . (De même pour clan et classe monotone dénotés  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  respectivement)

**Résultat.** On a  $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$

## Théorème (Classe monotone)

Soit  $\mathcal{C}$  un clan, alors  $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{T}(\mathcal{C})$  (et donc c'est une tribu)

Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{R} \text{ avec } A \text{ au plus dénombrable ou } A^c \text{ au plus dénombrable}\}.$$

1. Montrer que  $\mathcal{I}$  est une tribu.
2. Montrer que  $\mathcal{I} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .
3. Conclure.

## Définition

Soit  $X$  un espace métrique, la **tribu des boréliens** de  $X$ , dénotée  $\mathcal{B}_X$ , est la tribu engendrée par les ouverts de  $X$ . Les éléments de cette tribu sont les **boréliens** de  $X$ .

**Résultat.** Soit  $Y$  sous-espace métrique de  $X$  alors  $\mathcal{B}_Y$  est la tribu de  $Y$  induite par  $\mathcal{B}_X$  sur  $Y$

**Résultat.** Les intervalles ouverts et fermés de  $\mathbb{R}$  sont des boréliens de  $\mathbb{R}$

## Proposition

*Soit  $X$  espace métrique. On a*

- ▶  $\mathcal{B}_X$  est la tribu engendré par les fermés de  $X$
- ▶  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  est la tribu engendré par les intervalles de  $\mathbb{R}$  et même uniquement les intervalles de la forme  $]a; +\infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$
- ▶  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  est la tribu engendré par les pavés  $I_1 \times \cdots \times I_n$  avec  $I_j$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$

**Remarque.** Quand  $X$  est un espace métrique, la tribu considérée sur  $X$  est par défaut la tribu des boréliens

## §2 Mesures

### Définition

Soit  $\mathcal{T}$  une tribu de  $X$ . Une **mesure** (positive) sur  $X$  est une application  $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0; +\infty]$  telle que

- ▶  $\mu(\emptyset) = 0$
- ▶ Si  $(A_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{T}$  d.d.d. (deux à deux disjoints) alors  $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$  (propriété de  **$\sigma$ -additivité**)

### Exemple

On prend  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  l'ensemble des parties de  $X$

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est la **mesure de comptage**

### Définition

Une **espace mesurable** est un couple  $(X, \mathcal{T})$  avec  $\mathcal{T}$  tribu de  $X$  et un **espace mesuré** est un triplet  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  avec, de plus,  $\mu$  une mesure sur  $\mathcal{T}$

Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré.

## Proposition

- ▶ Soient  $A$  et  $B$  deux mesurables avec  $A \subseteq B$ , alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$  (*monotonie*). Si, de plus,  $\mu(B) < +\infty$  alors  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$
- ▶ Soient  $A_1, \dots, A_k$  des mesurables, alors  $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$  avec égalité si les  $A_i$  sont d.d.d. (deux à deux disjoints)
- ▶ Soient  $A$  et  $B$  deux mesurables alors

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

- ▶ Soit  $(A_n)$  une suite de mesurables
  - ▶ Alors  $\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$  (*sous-additivité*)
  - ▶ Si  $(A_n) \nearrow A$  alors  $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$
  - ▶ Si  $(A_n) \searrow A$  et  $\mu(A_0) < \infty$  alors  $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$

## Définition

- ▶ La mesure  $\mu$  est **finie** si  $\mu(X) < +\infty$
- ▶ La mesure  $\mu$  est  **$\sigma$ -finie** s'il existe une suite  $(A_n)$  de mesurables avec
$$\bigcup_n A_n = X \quad \text{et} \quad \mu(A_n) < +\infty \quad \forall n$$
- ▶ La mesure  $\mu$  est une **mesure de probabilité** si  $\mu(X) = 1$
- ▶ Si  $X$  est métrique et  $\mathcal{T}$  est la tribu des boréliens, la mesure  $\mu$  est **borélienne**
- ▶ Si  $X = \mathbb{R}^n$  alors  $\mu$  est une **mesure de Radon** si  $\mu$  est borélienne et  $\forall K$  compact de  $X$ ,  $\mu(K) < +\infty$

## Définition

Une partie  $A$  de  $X$  (non nécessairement mesurable) est **négligeable** s'il existe un mesurable  $B$  avec  $A \subseteq B$  et  $\mu(B) = 0$ . Une mesure est **complète** si toutes les parties négligeables sont mesurables. Si ce n'est pas le cas, on peut construire une **extension** de  $\mu$  en une (unique) mesure complète  $\bar{\mu}$  en ajoutant les négligeables à  $\mathcal{T}$  pour obtenir la **tribu complétée**  $\bar{\mathcal{T}}$ .

Une propriété  $P(x)$  définie pour  $x \in X$  est **vraie presque partout** ou **vraie p.p.** si l'ensemble  $\{x \in X : P(x) \text{ est faux}\}$  est négligeable.



## Théorème

Il existe une unique mesure  $\nu_n$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que, pour chaque pavé  $P = I_1 \times \cdots \times I_n$  avec  $I_j$  intervalle, on a

$$\nu_n(P) = \text{vol}(P) = \text{produit des longueurs de } I_j$$

On note  $\lambda_n$  la complétée de  $\nu_n$  et on l'appelle la *mesure de Lebesgue* dans  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{L}_n$  la complétée de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  pour cette mesure et on l'appelle la *tribu de Lebesgue* de  $\mathbb{R}^n$ .

On a les propriétés suivantes

- ▶  $\nu_n$  est unique
- ▶  $\nu_n$  est une mesure de Radon et est  $\sigma$ -finie
- ▶  $\nu_n$  est invariante par translation,  $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$   
 $\nu_n(x + A) = \nu_n(A)$
- ▶  $\nu_1$  est donnée par la formule suivante pour  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\nu_1(A) = \inf \left\{ \sum_j (b_j - a_j) : A \subseteq \bigcup_j ]a_j, b_j[ \right\}$$

Le but de cet exercice est d'aboutir à l'existence d'une partie  $A \subseteq \mathbb{R}$  qui n'est pas Lebesgue-mesurable. En particulier,  $A$  n'est pas borélienne.

1. Soit  $B$  une partie de  $\mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $b \in B$  tel que  $x - b \in \mathbb{Q}$ . Montrer que si  $B$  est Lebesgue-mesurable alors  $\lambda(B) > 0$ .
2. Soit  $B$  une partie de  $[0, 1]$  telle que  $\forall x, y \in B, x \neq y \implies x - y \notin \mathbb{Q}$ . Montrer qu'il existe une infinité de translatés de  $B$  inclus dans  $[0, 2]$  et deux à deux disjoints. En déduire que si  $B$  est Lebesgue-mesurable alors  $\lambda(B) = 0$ .
3. Que peut-on dire d'une partie de  $\mathbb{R}$  vérifiant les deux propriétés ci-dessus? De quelle façon peut-on obtenir une telle partie de  $\mathbb{R}$ ?

### §3 Fonctions mesurables et intégrales

Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable.

#### Définition

Une **fonction étagée** est une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$f = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$$

avec  $k \geq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $A_i \in \mathcal{T}$  et  $\chi_A$  est la fonction caractéristique de  $A$

Une fonction  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  est **mesurable** si elle est la limite (simple) de fonctions étagées. Si  $X$  métrique et  $\mathcal{T}$  tribu des boréliens, on dit que  $f$  est **borélienne**

On dit que la fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par  $f = (f_1, \dots, f_n)$  est **mesurable** si chaque  $f_i$  est mesurable

**Résultat.** Si  $f$  est mesurable et positive, on peut trouver une suite croissante de fonctions étagées de limite  $f$

**Remarque.** Convention de calcul :  $0 \cdot (\pm\infty) = 0$  donc le produit est toujours défini dans  $\bar{\mathbb{R}}$  (mais pas la somme)

## Définition

Soit  $A$  une partie de  $X$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **mesurable** si  $A$  est mesurable et si  $f\chi_A$  ( $= f$  étendue à  $X$  par 0 sur  $A^c$ ) est mesurable

**Résultat.** La fonction  $\chi_A$  est mesurable ssi  $A$  est mesurable

## Théorème

Soit  $A$  un mesurable de  $X$ . La fonction  $f : A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est mesurable ssi on a :  $f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{T}$ ,  $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{T}$  et,  $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ,  $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ .

## Proposition

- ▶ Si  $X$  est métrique alors les fonctions continues sont boréliennes
- ▶ Une limite simple de fonctions mesurables est mesurable
- ▶ Soient  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  borélienne et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  mesurable alors  $g \circ f$  mesurable
- ▶ Soient  $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurables alors  $fg$  est mesurable,  $\lambda f$  est mesurable ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) et  $f + g$  mesurable là où elle est définie

## Proposition

- ▶ Soient  $f_1, \dots, f_n$  mesurables alors  $\max(f_1, \dots, f_n)$  et  $\min(f_1, \dots, f_n)$  sont mesurables
- ▶ Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables alors  $\sup f_n$ ,  $\inf f_n$ ,  $\limsup f_n$  et  $\liminf f_n$  sont mesurables

## Théorème

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \text{la suite } (f_n(x)) \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Alors la partie  $A$  est mesurable et la fonction  $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie par  $f(x) = \lim_n f_n(x)$  est mesurable

**Exercice.** Soient  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Démontrer que l'ensemble des points  $x \in X$  tels que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite est un ensemble mesurable.

*Indication :* On rappelle que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ssi  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  espace mesuré.

## Définition

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables.

- ▶  $(f_n)$  est **de Cauchy en mesure** si,  $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{m,n} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

- ▶  $(f_n)$  est **de Cauchy presque uniformément** si,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists A \in \mathcal{T}$  avec  $\mu(A) < \epsilon$  et  $(f_n)$  de Cauchy uniforme sur  $X \setminus A$

Soit  $f$  mesurable.

- ▶  $f_n \rightarrow f$  **en mesure** si,  $\forall \epsilon > 0$ ,

$$\lim_n \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

- ▶  $f_n \rightarrow f$  **presque uniformément** si,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists A \in \mathcal{T}$  avec  $\mu(A) < \epsilon$  et  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $X \setminus A$

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lebesgue-mesurable. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un borélien  $B \subseteq [0, 1]$  tel que  $\nu_1(B) < \epsilon$  et la restriction de  $f$  à  $[0, 1] \setminus B$  est continue.

1. Soient  $F$  et  $G$  deux fermés non vides et disjoints d'un espace métrique  $(X, d)$ . Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{d(x, G)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

est une fonction continue sur  $X$  qui vaut 1 sur  $F$  et 0 sur  $G$ .

(On rappelle que  $d(x, A)$  est la plus petite distance entre  $x$  et les points de  $A$ )

2. Soit  $A$  un Lebesgue-mesurable. On admet le résultat suivant : il existe  $F$  fermé et  $U$  ouvert tels que  $F \subseteq A \subseteq U$  et  $\nu_1(U \setminus F) < \epsilon$ . En déduire le résultat pour  $f$  la fonction caractéristique de  $A$ .
3. Montrer le résultat pour  $f$  une fonction étagée.
4. En utilisant le résultat suivant, déduire des questions précédentes le résultat en général :

Théorème d'Egoroff. Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions qui tend simplement vers  $f$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $A \in \mathcal{F}$  avec  $\mu(A) \leq \epsilon$  et  $(f_n)$  converge unif. vers  $f$  sur  $X \setminus A$ .

## §4 Intégrales

### Définition

Soit une **fonction étagée**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  de représentation  $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$ . On dit que la représentation est **admissible** si  $\forall i a_i \geq 0$  (et donc  $f \geq 0$ ). Elle est **canonique** si les  $a_i$  sont deux à deux distincts et les  $A_i$  sont d.d.d.

**Résultat.** Une fonction étagée admet une unique représentation canonique (à l'ordre près) et elle est admissible ssi  $f \geq 0$ .

### Définition

Soit  $f$  étagée et positive de représentation canonique  $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$ , on définit l'**intégrale** de  $f$  sur  $X$  par rapport à  $\mu$  par

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu = \int f = \sum_i a_i \mu(A_i) \in [0; \infty]$$

**Résultat.** Si  $f$  étagée et positive de représentation admissible  $f = \sum_i b_i \chi_{B_i}$  alors on a  $\int f = \sum_i b_i \mu(B_i)$



## Définition

Soit  $f : X \rightarrow [0; +\infty]$  mesurable. On définit l'intégrale de  $f$  sur  $X$  par rapport à  $\mu$  par

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu = \int f = \sup \left\{ \int u : u \text{ étagée, positive et } u \leq f \right\}$$

On dit que  $f$  est **intégrable** si  $\int f$  est finie.

Soit  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable, on dit que  $f$  a un **intégrale** si  $\int f_+ - \int f_-$  a un sens où  $f_+ = \max(f, 0)$  et  $f_- = \max(-f, 0)$  sont mesurables, positives telles que  $f = f_+ - f_-$ . Dans ce cas, on pose

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu \in \bar{\mathbb{R}}$$

On dit que  $f$  est **intégrable** si  $f_+$  et  $f_-$  sont intégrables. On note  $\mathcal{L}^1(X; \mu)$  l'ensemble des fonctions intégrables

**Remarque.**  $f$  intégrable  $\iff f$  a une intégrale finie  $\iff \int f_+ < +\infty$   
et  $\int f_- < +\infty \iff \int |f| < +\infty$

## Proposition

Soient  $f$  et  $g$  mesurables ayant une intégrale.

- ▶ Si  $f \leq g$  alors  $\int f \leq \int g$
- ▶ Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $\int (f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$

## Définition

Soit  $A \subseteq X$  mesurable et  $f : A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable. On dit que  $f$  a une **intégrale** si  $f\chi_A$  (= extension de  $f$  à  $X$  en prenant 0 sur  $A^c$ ) a une intégrale. On pose

$$\int_A f d\mu = \int_X f\chi_A d\mu$$

**Résultat.** Si  $A$  est négligeable alors  $\forall f : A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable, on a  $\int_A f = 0$ . De même, si  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable et  $f = 0$  p.p. alors  $\int f = 0$ .

**Exercice.** Soient  $(X, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une fonction  $\mu$ -intégrable.

1. Montrer que  $f$  est finie  $\mu$ -presque partout.
2. Montrer que si  $\int_X |f| d\mu = 0$  alors  $f$  est nulle  $\mu$ -presque partout.

**Résultat.** Soit  $f$  mesurable alors  $f$  a une intégrale pour  $\mu$  ssi  $f$  a une intégrale pour  $\bar{\mu}$  et, dans ce cas, les deux sont égales.

**Résultat.** Soient  $f, g$  mesurables et  $f = g$  p.p. Si  $f$  a une intégrale alors  $g$  a une intégrale et, dans ce cas, les deux sont égales.

### Proposition

Soit  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  intégrable. On pose  $A = f^{-1}(\{\pm\infty\})$ . Alors  $\mu(A) = 0$ .  
On pose  $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  définie par  $g(x) = f(x)$  si  $x \notin A$  et  $g(x) = 0$ . Alors  $\int |f - g| = 0$  et donc  $\int f = \int g$ .

**Remarque.** Il suit qu'on peut toujours modifier  $f$  intégrable pour qu'elle ne prenne que des valeurs finies sans changer son intégrale.

### Définition

Soit  $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  mesurable.  $f$  est **intégrable** ssi chaque  $f_i$  est intégrable et  $\int f = (\int f_i)_i$ . En particulier, si  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  alors  $\int f = \int \operatorname{Re}(f) + i \int \operatorname{Im}(f)$

## Théorème (Beppo-Levi)

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables positives. On suppose que  $(f_n)$  est convergente. Alors, on a  $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ .

**Résultat.** Si  $f$  et  $g$  ont une intégrale et les sommes  $f + g$  et  $\int f + \int g$  existent. Alors,  $f + g$  a une intégrale et  $\int(f + g) = \int f + \int g$ .

## Proposition

- ▶ Si  $f$  mesurable alors  $|f|$  mesurable
- ▶ Si  $f$  a une intégrale alors  $|\int f| \leq \int |f|$
- ▶ Si  $f$  mesurable et  $g$  intégrable avec  $|f| \leq g$  alors  $f$  intégrable
- ▶ Si  $f$  intégrable et  $\int |f| = 0$  alors  $f = 0$  p.p.
- ▶ Si  $f$  et  $g$  intégrables,  $f \leq g$  et  $\int f = \int g$  alors  $f = g$  p.p.

## Proposition (Inégalité de Markov)

Soit  $f$  mesurable. Soient  $1 \leq p < +\infty$  et  $t > 0$ . Alors

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p$$

**Notation.** L'intégrale de Riemann est dénotée par  $\int_a^b f(x) dx$

## Théorème

- ▶ Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue alors  $f$  est Lebesgue-intégrable sur  $[a, b]$  et  $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\nu_1$
- ▶ Dans le cas  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue avec  $I$  non compact d'extrémités  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ 
  - ▶  $f$  est Lebesgue-intégrable ssi l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  converge absolument et dans ce cas  $\int_a^b f(x) dx = \int_I f d\nu_1$
  - ▶ Si  $f \geq 0$  alors  $\int_a^b f(x) dx = \int_I f d\nu_1$
  - ▶ Si  $\int_I f d\nu_1$  existe alors on a  $\int_a^b f(x) dx = \int_I f d\nu_1$

**Remarque.** Dans le cas  $I$  non compact d'extrémités  $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ , il est possible que  $\int_a^b f(x) dx$  existe mais pas  $\int_I f d\nu_1$

**Notation.** Pour  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalle, on notera parfois  $\int_I f(x) dx$  plutôt que  $\int_I f d\nu_1$  (s'il n'y a pas de risque de confusion)

## Théorème (Critère de Lebesgue)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  ssi  $f$  est bornée et l'ensemble des discontinuités de  $f$  est  $\nu_1$ -négligeable.

**Résultat.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est Riemann-intégrable alors  $f$  est Lebesgue-intégrable et  $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\nu_1$ .

## Théorème

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-intégrable. On pose  $F(x) = \int_{[a,x]} f d\nu_1$ . Alors  $F$  est dérivable  $\nu_1$ -p.p. et pour  $F'(x) = f(x)$   $\nu_1$ -p.p.

## Théorème (Leibniz-Newton pour l'intégrale de Lebesgue)

Soit  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dérivable sur  $]a, b[$  avec  $F'$   $\nu_1$ -intégrable. Alors,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} F'(t) d\nu_1(t)$ .

**Remarque.** Ce résultat n'est pas forcément vraie si on suppose juste  $F$  dérivable  $\nu_1$ -p.p (exemple :  $F(x) = 0$  sur  $[0, 1/2]$  et  $= 1$  sur  $]1/2, 1]$ ) et même avec  $F$  continue (on peut construire  $F$  continue avec  $F' = 0$  p.p.)

On considère la fonction  $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2(x) & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est Lebesgue-intégrable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
2. Calculer l'intégrale de Lebesgue  $\int_{[0; \pi/2]} f(x) d\nu_1(x)$ .

On pose  $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  est finie si et seulement si  $x > 0$ .
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
3. Calculer  $f(x) + f(x+1)$  pour  $x > 0$ . En déduire la valeur de  $\lim_{x \searrow 0} xf(x)$ .

## §5 Les grands théorèmes

### Théorème (Lemme de Fatou)

Soit  $(f_n)$  suite de fonctions mesurables  $\geq 0$ , alors  $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$

### Théorème (Convergence dominée)

Soit  $(f_n)$  suite de fonctions mesurables avec  $f_n \rightarrow f$  et telle qu'il existe  $g$  intégrable avec  $\forall n, |f_n| \leq g$ . Alors  $f$  est intégrable et  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$  et donc  $\int \lim f_n = \lim \int f_n$ .

### Proposition (Réciproque de la convergence dominée)

Soit  $(f_n)$  suite de fonctions mesurables et  $f$  mesurable tels que  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ . Alors il existe une suite extraite  $(f_{n_k})$  et une fonction intégrable  $g$  tels que  $\forall k, |f_{n_k}| \leq g$  et  $f_{n_k} \rightarrow f$  p.p.

### Théorème (Convergence dominée p.p.)

Soit  $(f_n)$  suite de fonctions mesurables telle qu'il existe  $g$  intégrable avec  $\forall n, |f_n| \leq g$  p.p et il existe  $f$  mesurable avec  $f_n \rightarrow f$  p.p. Alors  $f$  est intégrable,  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$  et  $\int f_n \rightarrow \int f$ .



## Intégrales dépendant d'un paramètre

**Notation.**  $f : X \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $\Lambda \subseteq Y$  espace métrique). Pour  $\lambda \in \Lambda$ ,  $f(\cdot, \lambda) : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto f(x, \lambda)$ . De même avec  $f(x, \cdot)$  pour  $x \in X$ .

## Théorème

*Supposons que*

1. *Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $f(\cdot, \lambda)$  est mesurable*
2. *Pour presque tout  $x \in X$ ,  $f(x, \cdot)$  est continue*
3. *Il existe  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable telle,  $\forall \lambda \in \Lambda$ ,  $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$  p.p.*

*Alors  $F : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda) d\mu$  est continue.*

## Proposition

*Dans le cas où  $\Lambda$  est un ouvert de  $Y = \mathbb{R}^n$ , on peut remplacer la condition 3 par*

- 3'. *Pour toute boule fermée  $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$ , il existe une fonction intégrable  $g$  telle que  $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$ ,  $|f(\cdot, \lambda)| \leq g$  p.p.*

On suppose  $\Lambda$  ouvert de  $Y = \mathbb{R}^n$ . Pour la variable  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda$ , on dénote par  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial \lambda_j}$  la dérivée partielle

## Théorème

Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Supposons que

1. Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , la fonction  $f(\cdot, \lambda)$  est intégrable  
Donc la fonction  $F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda) d\mu$  existe
2. Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $\partial_j f(x, \cdot)$  existe
3. Pour toute boule fermée  $\bar{B}(\lambda_0, r) \subseteq \Lambda$ , il existe une fonction intégrable  $g$  telle que  $\forall \lambda \in \bar{B}(\lambda_0, r)$ ,  $|\partial_j f(\cdot, \lambda)| \leq g$  p.p.

Alors  $\partial_j F$  existe et  $\partial_j F(\lambda) = \int \partial_j f(\cdot, \lambda) d\mu$

## Théorème

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions intégrables telles que  $\sum_n \int |f_n| < +\infty$ .  
Alors  $\sum_n f_n(x)$  converge p.p. et  $\sum_n \int f_n = \int f$  avec

$$f(x) = \begin{cases} \sum_n f_n(x) & \text{si la série converge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice.

1. Montrer que  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$  est Lebesgue-intégrable sur  $[0, \infty[$ .
2. Montrer que, pour tout  $x > 0$ , on peut écrire  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$ . Et pour  $x = 0$ ?
3. En déduire que  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ .

Exercice. Pour  $y \geq 0$ , on pose  $F(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2 y}}{1 + x^2} dx$ .

1. Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Calculer  $F(0)$  et déterminer  $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y)$ .
3. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
4. Montrer que  $F$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide du nombre  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ .
5. En déduire, sous forme intégrale, une expression de  $F(y)$  pour  $y > 0$ .
6. En déduire la valeur de  $I$ .

## §6 Mesures produit

Soient  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{S}, \nu)$  deux espaces mesurés.

### Définition

La **tribu produit**  $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$  est la tribu de  $X \times Y$  engendrée par les **pavés**  $A \times B$  avec  $A \in \mathcal{T}$  et  $B \in \mathcal{S}$ .

Pour  $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ , la **coupe** de  $E$  en  $x \in X$  est  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$  et la **coupe** de  $E$  en  $y \in Y$  est  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$ .

**Résultat.**  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$

**Résultat.** Soit  $E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$  alors  $\forall x, E_x \in \mathcal{S}$  et  $\forall y, E^y \in \mathcal{T}$

### Proposition

*Supposons  $\mu$  et  $\nu$   $\sigma$ -finies alors il existe une unique mesure  $\mu \otimes \nu$  sur  $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ , appelée **mesure produit**, telle que  $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ , pour  $A \in \mathcal{T}$  et  $B \in \mathcal{S}$ . De plus, on a  $\forall E \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

**Résultat.** Si seulement une des deux mesures est  $\sigma$ -finie, on a bien l'existence mais pas l'unicité (ni la deuxième propriété)

**Remarque.** Pour  $\mu$  et  $\nu$   $\sigma$ -finies, on a  $\bar{\mu} \otimes \bar{\nu} = \overline{\mu \otimes \nu}$ .

## Théorème (Tonelli)

Soit  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  fonction  $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ -mesurable. Alors les fonctions

$$y \mapsto \int_X f(\cdot, y) d\mu \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_Y f(x, \cdot) d\nu$$

sont mesurables (pour  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  respectivement) et

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

## Corollaire

Soit  $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable. Alors  $f$  est intégrable ssi

$$\int_X \left( \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty$$

ce qui est bien sûr équivalent à  $\int_Y \left( \int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < +\infty$

## Théorème (Fubini)

Soit  $f : X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  intégrable. Alors

- ▶ Pour presque tout  $y \in Y$ , la fonction  $f(\cdot, y)$  est  $\mu$ -intégrable
- ▶ La fonction  $g$  est  $\nu$ -intégrable avec

$$g(y) = \begin{cases} \int_X f(\cdot, y) d\mu & \text{si l'intégrale existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

▶ On a 
$$\int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu = \int_Y g d\nu$$

(Et un énoncé analogue avec  $x$  et  $y$  échangés)

**Notation.** Si  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  est un borélien et  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  a une intégrale pour la mesure de Lebesgue  $\lambda_n$ , on note par abus (s'il n'y pas de risque de confusion)  $\int_B f d\lambda_n = \int_B f(x) dx = \int_B f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ .

Pour  $B = \mathbb{R}^n$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}} \left( \cdots \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2 \cdots \right) dx_n$$

## Théorème (Tonelli et Fubini, versions locales)

Soit  $E \subseteq X \times Y$  mesurable et  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mesurable.

- (Tonelli) Supposons  $f \geq 0$ . Alors,  $y \mapsto \int_{E^y} f(\cdot, y) d\mu$  est mesurable et

$$\int_E f d\mu \otimes \nu = \int_Y \left( \int_{E^y} f d\mu \right) d\nu = \int_Z \left( \int_{E^y} f d\mu \right) d\nu$$

pour  $Z$  mesurable avec  $Z \supseteq \{y \in Y : \exists x \in X \text{ avec } (x, y) \in E\}$   
(Et un énoncé analogue avec  $x$  et  $y$  échangés)

- (Fubini) Supposons  $f$  intégrable. Alors, pour presque tout  $y$ ,  $f(\cdot, y)$  est intégrable sur  $E^y$ , la fonction  $g$  est  $\nu$ -intégrable avec

$$g(y) = \begin{cases} \int_{E^y} f(\cdot, y) d\mu & \text{si l'intégrale existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\int_E f d\mu \otimes \nu = \int_Y g d\nu = \int_Z g d\nu$$

pour  $Z$  mesurable avec  $Z \supseteq \{y \in Y : \exists x \in X \text{ avec } (x, y) \in E\}$   
(Et un énoncé analogue avec  $x$  et  $y$  échangés)

### Exercice.

Soit  $\mu$  la mesure de comptage sur  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ .

1. Soit  $\Delta = \{(x, x) ; x \in [0, 1]\}$ . Est-ce que  $\Delta$  est un borélien de  $\mathbb{R}^2$  ? de  $[0, 1]^2$  ?
2. Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes et les calculer :

$$I_1 = \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$
$$I_2 = \int_{[0,1]} \left( \int_{[0,1]} \chi_{\Delta}(x, y) d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

3. Quelle conclusion peut-on tirer de cet exercice ?



## §7 Changements de variables

### Proposition

Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  et soit  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Alors,  $A(E)$  est borélien ssi  $E$  est borélien et, dans ce cas,  $\lambda_n(A(E)) = |\det(A)| \lambda_n(E)$ .

**Résultat.** Si  $A$  est non inversible alors  $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A(E)$  est négligeable

### Définition

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Une application  $\Phi : U \rightarrow V$  est un  $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphisme si

- ▶  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  a des dérivées partielles continues,
- ▶  $\Phi$  est bijective,
- ▶ Le **déterminant jacobien** de  $\Phi$  est non nul en tout point de  $U$

$$\det J_\Phi = \det \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

## Théorème (changement de variables)

Soit  $\Phi : U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphisme et soient  $f : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . On pose  $g = |J_\Phi|(f \circ \Phi) : U \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Alors, on a

- ▶  $g$  est borélienne ssi  $f$  est borélienne,
- ▶  $g$  est Lebesgue-mesurable ssi  $f$  est Lebesgue-mesurable,
- ▶  $g$  a une intégrale ssi  $f$  a une intégrale et on a

$$\int_V f d\lambda_n = \int_U g d\lambda_n = \int_{\Phi^{-1}(V)} |J_\Phi|(f \circ \Phi) d\lambda_n$$

## Corollaire

Supposons  $\Phi$  continue sur  $U_1$  ouvert avec  $U_1 \supseteq U$  (et toujours  $\Phi : U \rightarrow V$  un  $\mathcal{C}^1$ -diffeomorphisme). Soit  $E \subseteq U_1 \setminus U$  fermé et négligeable,  $f : V \cup \Phi(E) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . On pose  $g = |J_\Phi|(f \circ \Phi) : U \cup E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Alors, on a les mêmes résultats et

$$\int_{V \cup \Phi(E)} f d\lambda_n = \int_{\Phi^{-1}(V \cup \Phi(E))} |J_\Phi|(f \circ \Phi) d\lambda_n = \int_{\Phi^{-1}(V)} |J_\Phi|(f \circ \Phi) d\lambda_n$$

**Remarque.** En général, on prendra  $E = \partial U$  (frontière)

## Coordonnées polaires

$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $\Phi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$

$U = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[, V = \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[ \times \{0\}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2(x, y) = \int_{[0, +\infty[ \times [0, 2\pi[} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \cdot r d\lambda_2(r, \theta)$$

## Coordonnées sphériques

$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avec  $\Phi(r, \phi, \theta) = (r \cos(\phi) \cos(\theta), r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi))$

$U = ]0, +\infty[ \times ]-\pi/2, \pi/2[ \times ]0, 2\pi[$

$V = \mathbb{R}^3 \setminus (((0, 0) \times \mathbb{R}) \cup (]0, \infty[ \times \{0\} \times \mathbb{R}))$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d\lambda_3(x, y, z) = \int_{[0, +\infty[ \times [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi[} f(r \cos(\phi) \cos(\theta), r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi)) \cdot r^2 \cos(\phi) d\lambda_3(r, \phi, \theta)$$

## Coordonnées cylindriques

$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  avec  $\Phi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$

$U = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^3 \setminus ([0, \infty[ \times \{0\} \times \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d\lambda_3(x, y, z) = \int_{]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r d\lambda_3(r, \phi, z)$$

## Proposition (Comparaison avec des fonctions classiques)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On se place dans l'espace métrique  $\mathbb{R}^n$ . Alors

- ▶  $x \mapsto 1/\|x\|^a$  est intégrable sur  $B(0, 1) \setminus \{0\}$  ssi  $a < n$
- ▶  $x \mapsto 1/\|x\|^a$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$  ssi  $a > n$
- ▶  $x \mapsto 1/(\|x\|^a |\ln \|x\||^b)$  est intégrable sur  $B(0, 1/2) \setminus \{0\}$  ssi  $a < n$  ou ( $a = n$  et  $b > 1$ )
- ▶  $x \mapsto 1/(\|x\|^a |\ln \|x\||^b)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2)$  ssi  $a > n$  ou ( $a = n$  et  $b > 1$ )

## Fonction Gamma d'Euler.

On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que,  $\forall x > 0, \forall y > 0$ , l'application  $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$  est  $\lambda_1$ -intégrable sur  $]0; 1[$ .

Pour  $x > 0, y > 0$ , on pose

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (\text{fonction Bêta d'Euler})$$

2. Soient  $x > 0, y > 0$  et  $I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} ds dt$ , calculer  $I$  en utilisant le changement de variables dans  $\mathbb{R}^2$  :  $u = t$  et  $v = t + s$ .
3. En calculant  $I$  d'une autre manière, établir pour  $x, y > 0$ , l'identité

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$