Equations différentielles

1. Premiers résultats
2. Théorie de Cauchy-Lipschitz
3. Equations différentielles linéaires

§2.1 Equations différentielles – Premiers résultats

Définition

Une équation différentielle (résolue d'ordre 1) est une equation en la fonction y de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \tag{E}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ continue. f est le champ de vecteurs de (E).

Une solution de E est (y, J) avec J ouvert contenue dans I, $y : J \to \mathbb{R}^d$ dérivable avec, $\forall t \in J$, $y(t) \in U$ avec $f(t, y(t)) = y'(t)$. La solution est globale si $I = J$. La solution est maximale s'il n'existe pas de solution $(\tilde{y}, \tilde{J})$ avec $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{y}(t) = y(t)$ pour tout $t \in J$.

Si $f(t, y(t)) = f(y(t))$ alors l'équation est autonome

Théorème

Toute solution se prolonge en une solution maximale (mais pas nécessairement de manière unique)

Réduction à l'ordre 1.

L'équation différentielle d'ordre n

$$\boxed{y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}), \quad t \in I}$$

Y solution de $Y = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix}$

avec $f : I \times U^n \to \mathbb{R}^d$ est équivalente à l'équation d'ordre 1

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad t \in I$$

avec Y à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^n \cong \mathbb{R}^{dn}$ et

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, X) \end{pmatrix} \quad \text{pour } X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$n-1$

$Y' = \begin{pmatrix} y_0' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}$

La solution y correspondant à la solution $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

$y_0' = y_1$

$y_1' = y_2 = y_0''$

Théorème (équations linéaires d'ordre 1)

$y_{n-1} = y_0^{(n-1)}$

$f(t,y) = a(t)y + b(t)$

On considère l'équation

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \ \ t \in I \qquad \text{(E)}$$

avec I intervalle ouvert, $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors a admet une unique primitive A qui s'annule en t_0 donnée par

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

L'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ admet une unique solution globale vérifiant $y(t_0) = y_0$ donnée par

$$y(t) = y_0\, e^{A(t)}$$

L'équation (E) admet une unique solution globale vérifiant $y(t_0) = y_0$ donnée par

$$y(t) = y_0\, e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} b(s)\, ds$$

Equations différentielles linéaires du premier ordre

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad t \in I \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I données, et $y : I \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction y définie sur I par :

   $$\forall t \in I,\ y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s)ds \tag{2}$$

   est solution de (1) sur I et vérifie $y(t_0) = y_0$.
2. Retrouver cette formule (formule de Duhamel) en utilisant la méthode de variation de la constante.
3. Donner la solution maximale au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2} = -\dfrac{1}{t^3},\ t \in]0, +\infty[\\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Théorème (lemme de Gronwall)

Soient I intervalle, $t_0 \in I$, $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues avec a positive telles que $\forall t \in I,\ t \geq t_0$, on a $y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)y(s)\,ds$. Alors, on a

$$\forall t \in I,\ t \geq t_0, \quad y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\,a(s)\,e^{\int_s^t a(u)\,du}\,ds$$

Si, de plus, $b(t) = b$ est une fonction constante, on a

$$\forall t \in I,\ t \geq t_0, \quad y(t) \leq b\,e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

Théorème (lemme de Gronwall – Forme différentielle)

Soient I intervalle, $t_0 \in I$, $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues avec y de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall t \in I$, on a $y'(t) \leq b(t) + a(t)y(t)$. Alors, on a

$$\forall t \in I,\ t \geq t_0, \quad y(t) \leq y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + \int_{t_0}^{t} b(s)\,e^{\int_s^t a(u)\,du}\,ds$$

§2.2 Théorie de Cauchy-Lipschitz

Définition

Soient I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$. Une problème de Cauchy est une système d'équations

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 & \leftarrow \text{condition initiale} \end{cases}$$

où $t_0 \in I$, $y_0 \in U$ sont fixés.

Une solution de ce problème est une fonction $y : J \to \mathbb{R}^d$ avec $J \subseteq I$ ouvert contenant t_0, y dérivable sur I et vérifiant le système.

Définition

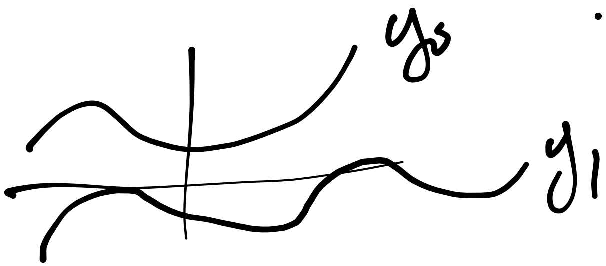
$f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état si $\forall (t,x) \in I \times U$, il existe $J \subseteq I$ ouvert contenant t, $V \subseteq U$ ouvert contenant x et $L \geq 0$ tels que

$$\forall s \in J, \forall y,z \in V, \ \|f(s,y) - f(s,z)\| \leq L\|y-z\|$$

ne dépend pas de s

Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Soient I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$. Supposons que f est continue sur $I \times U$ et f localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy



$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un ouvert $J \subseteq I$. En particulier, les hypothèses sont vérifiées si f est de classe $\mathcal{C}^1$.

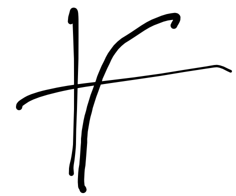
Résultat. Deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper

Théorème (Explosion en temps fini)

Soient $I =]a, b[$ ouvert et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant Cauchy-Lipschitz. Soit y solution maximale de $y'(t) = f(t, y(t))$ définie sur l'ouvert $]\alpha, \beta[$. Alors, on a

$]\alpha, \beta[\subseteq]a, b[$

- *Si $\beta < b$, alors $\lim_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$*
- *Si $a < \alpha$, alors $\lim_{t \to \alpha^+} \|y(t)\| = +\infty$*



Résultat. Si f est bornée alors les solutions maximales sont globales

Corollaire

Supposons $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, c'est-à-dire il existe $k : I \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\forall t \in I$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k(t) \|x - \cancel{y}\|$.

Alors la solution maximale est globale.

Exercice.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Construire une solution non nulle.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi ?

Exercice.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{t} y(t)^2 + \frac{2}{t} y(t), \quad t > 0 \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.
2. Montrer que, pour tout $t \in J$, $y(t) \neq 0$.
3. On définit $z : J \to \mathbb{R}$ par $z(t) = 1/y(t)$. Montrer que z est solution sur J de l'équation différentielle
$$z'(t) = -\frac{2}{t} z(t) + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$
4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation précédente.
5. En déduire l'intervalle J et une expression explicite pour la solution y.

Exercice.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^\times$, $xf(x) < 0$. Soit $y_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur J.
3. En déduire que l'intervalle J contient $[0; +\infty[$ et qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\lim_{t \to +\infty} y(t)^2 = \ell$.
4. On veut montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$.
   - 4.1 Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $y(t) > 0$ et que $\lim_{t \to \infty} y(t) = \sqrt{\ell}$.
   - 4.2 En déduire que $y'(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ puis que $f(\sqrt{\ell}) = 0$.
   - 4.3 Conclure.
5. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x) \leq -\alpha x^2$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$.

§2.3 Equations différentielles linéaires

Définition

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to M_d(\mathbb{R})$, $b : I \to \mathbb{R}^d$ continues. Une équation différentielle linéaire est de la forme

$$\boxed{y'(t) = A(t)y(t) + b(t)} \qquad y(t) \in \mathbb{R}^d \qquad \text{(L)}$$

Cette équation est homogène si $b = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{y'(t) = A(t)y(t)} \qquad (\mathrm{L}_H)$$

ajout
$y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$

(L_H) est l'équation homogène associée à (L)

Théorème

- *Le problème de Cauchy correspondant à (L) admet une unique solution maximale et cette solution est globale*
- *L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (L_H) est un sev de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ de dim. d. (L'application $y \mapsto y(t_0)$ est un iso. entre $\mathcal{S}_H$ et $\mathbb{R}^d$)*
- *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (L) est de la forme $y + \mathcal{S}_H$ avec $y \in \mathcal{S}$ (espace affine de direction $\mathcal{S}_H$)*

Solut. part.

Définition

Une base de $\mathcal{S}_H$ est un système fondamental de solution de (L_H). Soit $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ une telle base, la matrice $\Phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_d(t))$ est la matrice fondamentale et son déterminant est le wronskien.

Théorème

- *Une famille $(y_1, \ldots, y_k)$ de solutions de (L_H) est libre ssi $\exists t_0 \in I$ tel que $(y_1(t_0), \ldots, y_k(t_0))$ est libre ssi $\forall t \in I$ tel que $(y_1(t), \ldots, y_k(t))$ est libre. En particulier, $(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ est un système fondamental de solution ssi son wronskien ne s'annule jamais.*
- *Le wronskien w est solution de $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, w(t)$ et donc*

$$\boxed{w(t) = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}(A(s))\, ds}}$$

$y' = Ay$

dim 1

Théorème (équation linéaire à coefficient constant)

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$. La solution maximale du système $\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ *est* globale *définie sur $\mathbb{R}$ et égale à*

$$\boxed{y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0}$$

expo. de matrice

Note. Pour l'équation non homogène $y'(t) = Ay(t) + b(t)$, on cherche une solution de la forme $e^{tA}\, v(t)$ (variation de la constante)

$e^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$

Définition

Soit $M \in M_d(\mathbb{R})$, l'exponentielle de la matrice M est $e^M = \sum_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!}$ $\in M_d(\mathbb{R})$

e^M est inversible d'inverse e^{-M}

Résultat.

$e^0 = I_d$

- Si $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ alors $e^M = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$
- Soit P inversible alors $e^{PMP^{-1}} = Pe^M P^{-1}$
- Si M et N commutent alors e^M et e^N commutent et $e^{M+N} = e^M e^N$
- L'application $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable de dérivée $A\, e^{tA}$

$= Pe^M P^{-1}$

$(PMP^{-1})^n$

$$e^{PJP^{-1}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(PJP^{-1})^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{PJ^nP^{-1}}{n!} = P\Big(\sum_{n\geq 0} \frac{J^n}{n!}\Big)P^{-1}$$

Théorème

On considère le cas $d = 2$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Les solutions de l'équation $y'(t) = A\,y(t)$ sont

- *Si A diagonalisable sur $\mathbb{R}$ avec une base de vecteurs propres (v_1, v_2) de valeurs propres λ_1, λ_2 :*

$A = PDP^{-1}$ $\quad e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$

$\lambda_1 = \lambda_2$ possible

$$\boxed{\mu_1 e^{\lambda_1 t}\, v_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t}\, v_2, \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}}$$

- *Si A diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non sur $\mathbb{R}$, les valeurs propres sont $\lambda, \bar{\lambda}$; soit v un vecteur propre associé à λ, on écrit $v = v_1 + iv_2$avec $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}$, $v_1 = v$, $v_2 = \bar{v}$

$$\boxed{e^{\alpha t}\left(\mu_1(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) + \mu_2(\cos(\beta t)v_2 + \sin(\beta t)v_1)\right), \ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}}$$

- *Si A n'est pas diagonalisable avec unique valeur propre λ avec v_1 vecteur propre et $\boxed{v_2 \text{ tel que } (A - \lambda I)v_2 = v_1}$:*

$$A = P\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{J}P^{-1}$$

$$\boxed{\mu_1 e^{\lambda t}\, v_1 + \mu_2(te^{\lambda t} v_1 + e^{\lambda t}\, v_2), \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}}$$

$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

explicite $\mathcal{J}^n$

Exercice.

Exprimer l'équation différentielle suivante :

$$y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$$

comme un système d'équations linéaires d'ordre 1 à 3 inconnues. Puis, résoudre ce système.