Equations différentielles

1. Premiers résultats
2. Théorie de Cauchy-Lipschitz
3. Equations différentielles linéaires

§2.1 Equations différentielles – Premiers résultats

Définition

Une équation différentielle (résolue d'ordre 1) est une equation en la fonction y de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \tag{E}$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ continue. f est le champ de vecteurs de (E).

Une solution de E est (y, J) avec J ouvert contenue dans I, $y : J \to \mathbb{R}^d$ dérivable avec, $\forall t \in J$, $y(t) \in U$ avec $f(t, y(t)) = y'(t)$. La solution est globale si $I = J$. La solution est maximale s'il n'existe pas de solution $(\tilde{y}, \tilde{J})$ avec $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{y}(t) = y(t)$ pour tout $t \in J$.

Si $f(t, y(t)) = f(y(t))$ alors l'équation est autonome

Théorème

Toute solution se prolonge en une solution maximale (mais pas nécessairement de manière unique)

Réduction à l'ordre 1.

L'équation différentielle d'ordre n

$$\boxed{y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}), \quad t \in I}$$

Y solution de

$Y = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{pmatrix}$

avec $f : I \times U^n \to \mathbb{R}^d$ est équivalente à l'équation d'ordre 1

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \quad t \in I$$

avec Y à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^n \cong \mathbb{R}^{dn}$ et

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, X) \end{pmatrix} \quad \text{pour } X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$n-1$

$Y' = \begin{pmatrix} y_0' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{pmatrix}$

La solution y correspondant à la solution $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

$y_0' = y_1$

$y_1' = y_2 = y_0''$

Théorème (équations linéaires d'ordre 1)

$y_{n-1} = y_0^{(n-1)}$

$f(t,y) = a(t)y + b(t)$

On considère l'équation

$$\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \ t \in I} \tag{E}$$

avec I intervalle ouvert, $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors a admet une unique primitive A qui s'annule en t_0 donnée par

$$\boxed{A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

L'équation homogène $y'(t) = a(t)y(t)$ admet une unique solution globale vérifiant $\boxed{y(t_0) = y_0}$ donnée par

$$\boxed{y(t) = y_0\, e^{A(t)}}$$

L'équation (E) admet une unique solution globale vérifiant $\boxed{y(t_0) = y_0}$ donnée par

$$\boxed{y(t) = y_0\, e^{A(t)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t)-A(s)} b(s)\, ds}$$

Equations différentielles linéaires du premier ordre

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad t \in I \tag{1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur I données, et $y : I \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

1. Soit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction y définie sur I par :

$$\forall t \in I, \; y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\sigma)d\sigma} f(s)ds \tag{2}$$

   est solution de (1) sur I et vérifie $y(t_0) = y_0$.

2. Retrouver cette formule (formule de Duhamel) en utilisant la méthode de variation de la constante.
3. Donner la solution maximale au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t^2} = -\dfrac{1}{t^3}, \; t \in]0, +\infty[\\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Théorème (lemme de Gronwall)

Soient I intervalle, $t_0 \in I$, $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues avec a positive telles que $\forall t \in I,\ t \geq t_0$, on a $y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} a(s) y(s)\, ds$. Alors, on a

$$\forall t \in I,\ t \geq t_0, \quad y(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)\, a(s)\, e^{\int_s^t a(u)\, du}\, ds$$

Si, de plus, $b(t) = b$ est une fonction constante, on a

$$\boxed{\forall t \in I,\ t \geq t_0, \quad y(t) \leq b\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}}$$

Théorème (lemme de Gronwall – Forme différentielle)

Soient I intervalle, $t_0 \in I$, $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues avec y de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall t \in I$, on a $y'(t) \leq b(t) + a(t) y(t)$. Alors, on a

$$\forall t \in I,\ t \geq t_0, \quad y(t) \leq y(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} + \int_{t_0}^{t} b(s)\, e^{\int_s^t a(u)\, du}\, ds$$

§2.2 Théorie de Cauchy-Lipschitz

Définition

Soient I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$. Une problème de Cauchy est une système d'équations

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

← condition initiale

où $t_0 \in I$, $y_0 \in U$ sont fixés.

Une solution de ce problème est une fonction $y : J \to \mathbb{R}^d$ avec $J \subseteq I$ ouvert contenant t_0, y dérivable sur I et vérifiant le système.

Définition

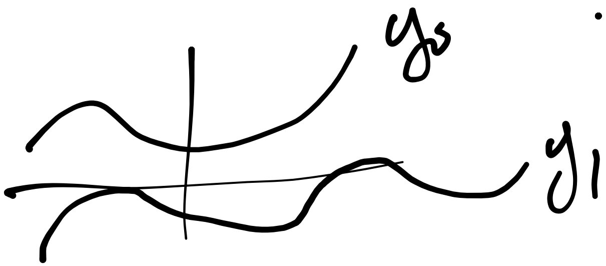
$f : I \times U \to \mathbb{R}^d$ est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état si $\forall (t,x) \in I \times U$, il existe $J \subseteq I$ ouvert contenant t, $V \subseteq U$ ouvert contenant x et $L \geq 0$ tels que

$$\forall s \in J, \forall y, z \in V, \; \|f(s,y) - f(s,z)\| \leq L \|y - z\|$$

ne dépend pas de s

Théorème (Cauchy-Lipschitz)

Soient I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : I \times U \to \mathbb{R}^d$. Supposons que f est continue sur $I \times U$ et f localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy



$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un ouvert $J \subseteq I$. En particulier, les hypothèses sont vérifiées si $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$.

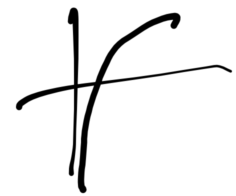
Résultat. Deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper

Théorème (Explosion en temps fini)

Soient $I =]a, b[$ ouvert et $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant Cauchy-Lipschitz. Soit y solution maximale de $y'(t) = f(t, y(t))$ définie sur l'ouvert $]\alpha, \beta[$. Alors, on a

$]\alpha, \beta[\subseteq]a, b[$

- *Si $\beta < b$, alors $\lim_{t \to \beta^-} \|y(t)\| = +\infty$*
- *Si $a < \alpha$, alors $\lim_{t \to \alpha^+} \|y(t)\| = +\infty$*



Résultat. Si f est bornée alors les solutions maximales sont globales

Corollaire

Supposons $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, c'est-à-dire il existe $k : I \to \mathbb{R}^+$ continue telle que $\forall t \in I$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, on a $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k(t) \|x - y\|$.

Alors la solution maximale est globale.

Exercice.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Construire une solution non nulle.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi ?

Exercice.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)^2 + \frac{2}{t}y(t), \quad t > 0 \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.
2. Montrer que, pour tout $t \in J$, $y(t) \neq 0$.
3. On définit $z : J \to \mathbb{R}$ par $z(t) = 1/y(t)$. Montrer que z est solution sur J de l'équation différentielle
$$z'(t) = -\frac{2}{t}z(t) + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$
4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation précédente.
5. En déduire l'intervalle J et une expression explicite pour la solution y.

Exercice.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^\times$, $xf(x) < 0$. Soit $y_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur J.
3. En déduire que l'intervalle J contient $[0; +\infty[$ et qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)^2 = \ell$.
4. On veut montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$.

    4.1 Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $y(t) > 0$ et que $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = \sqrt{\ell}$.

    4.2 En déduire que $y'(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ puis que $f(\sqrt{\ell}) = 0$.

    4.3 Conclure.
5. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x) \leq -\alpha x^2$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$.