

Algèbre linéaire et bilinéaire, Analyse matricielle

1. Dualité
2. Formes bilinéaires et formes quadratiques
3. Espaces euclidiens, espaces hermitiens
4. Décompositions
5. Normes matricielles

§1. Dualité

Notations. E espace-vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} ($= \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Une **forme linéaire** est application linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{K} \leftarrow \text{ev de dim. 1}$

L'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est le **dual** de E , c'est un \mathbb{K} -ev de dimension n aussi.

Résultats.

▶ Une forme linéaire est **nulle** ou **surjective**.

▶ Le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan (dim. $n - 1$) et la réciproque est aussi vraie.

▶ Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

$$f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

$$\text{Ker } f = \text{Ker } g \Rightarrow \exists \lambda \neq 0, f = \lambda g$$

$\lambda \in \mathbb{K}$

Th. rang: $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rang } f$
 $= 0$ ou 1

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Les applications $e_1^*, \dots, e_n^* : E \rightarrow \mathbb{K}$ telles que, $\forall x \in E$,

$$x = e_1^*(x)e_1 + \dots + e_n^*(x)e_n$$

$$e_i^*(x+y) = e_i^*(x) + e_i^*(y)$$

sont des formes linéaires. La famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de E^* appelée la base **duale** de (e_1, \dots, e_n) .

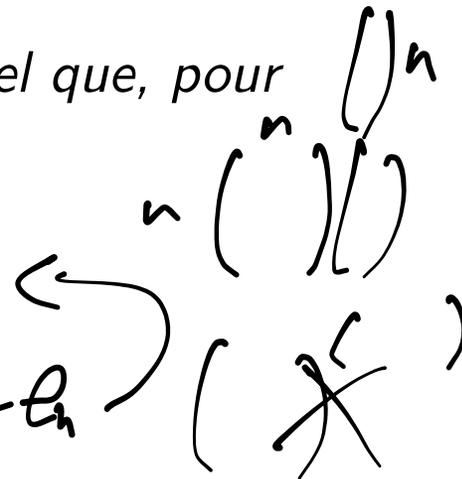
base de $E \leftrightarrow$ base de E^*

Théorème

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, e_i^* est l'unique élément de E^* tel que, pour tout j , on a

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$e_j = 0 \times e_1 + \dots + 1 \times e_j + \dots + 0 \times e_n$$



Théorème

Soit (f_1, \dots, f_n) une base de E^* . Il existe une unique base (e_1, \dots, e_n) de E avec $f_i = e_i^*$, $\forall i$. On l'appelle la base **antéduale** de la base (f_1, \dots, f_n) .

Exercice. Calculer la base duale de la base de \mathbb{R}^3 : $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$.

§2. Formes bilinéaires et formes quadratiques

Forme bilinéaire : application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable. L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel de dimension n^2 .

Sur $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, base de E , on écrit $x = \sum_i x_i e_i$, et $y = \sum_i y_i e_i$.
 ϕ fb $x \in E$ fixé $y \mapsto \phi(x, y)$ forme linéaire

On a

forme bilinéaire \rightarrow $\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \phi(e_i, e_j) = X^t A Y$

avec $A = (\phi(e_i, e_j)) \in M_n(\mathbb{K})$, **matrice représentant ϕ sur la base \mathcal{B}** ,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ (resp. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$) le **vecteur représentant x** (resp. y) sur la base \mathcal{B} .

$\mathcal{B} = (e_i) \quad \mathcal{B}' = (e'_i)$

Soit \mathcal{B}' une autre base E , la matrice A' de ϕ sur la base \mathcal{B}' vérifie

$A' = P^t A P$

avec P la **matrice de changement de base** de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

Remarque. $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id})$. (**Attention.** notation!)

$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id})$

$P = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \dots \\ e_n \end{matrix}$
 $e'_i = a_{i1} e_1 + \dots + a_{in} e_n$

Soit ϕ une **forme bilinéaire symétrique** (fbs), c'est-à-dire $\forall x, y, A^t = A$
 $\phi(x, y) = \phi(y, x) \iff$ la matrice de ϕ (dans toute base) est **symétrique**.

(Aussi possible forme bilinéaire alternée ou anti-symétrique.)

$$\phi(x, x) = 0$$

Pour $x, y \in E$, on dit x et y **orthogonaux**, noté $x \perp_{\phi} y$, si $\phi(x, y) = 0$.

Si $x \perp x$, on dit x **isotrope**.

$$S \neq \emptyset$$

\hookrightarrow par rapport ϕ

Pour $S \subseteq E$, on pose $S^{\perp \phi} = \{x \in E \mid \forall y \in S, \phi(x, y) = 0\}$. C'est toujours un sev de E . En fait, pour $S^{\perp} = \text{Vec}(S)^{\perp}$.

$$S^{\perp} = \bigcap_{y \in S} y^{\perp}$$

On note $\text{Ker } \phi = E^{\perp \phi}$, **noyau** de ϕ . Le **rang** de ϕ est $\dim E - \dim \text{Ker } \phi$.

$$x \in \text{Ker } \phi \iff \forall y \in E, \phi(x, y) = 0$$

F sev (f_1, \dots, f_m) génératrice de F

Lemme

Soit A matrice de ϕ dans une base, alors $\text{Ker } \phi = \text{Ker } A$.

$$\text{rang } \phi = \text{rang } A \quad F^{\perp} = \bigcap_i f_i^{\perp}$$

Théorème

Pour F sev de E , on a $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp} - \dim(E^{\perp} \cap F)$.

Si $E^{\perp} = \{0\}$ (**non dégénérée**) alors $F \oplus F^{\perp} = E$.

$$\hookrightarrow E^{\perp} \cap F = \{0\} \quad \dim E = \dim F + \dim F^{\perp} \quad \hookrightarrow \dim E \leq \dim F + \dim F^{\perp}$$

$$\text{or } F \cap F^\perp = \{0\} \quad // \Rightarrow E = F \oplus F^\perp$$

$$2 = y + z \quad y \perp z$$

Exercice.

Soit la forme bilinéaire ϕ de \mathbb{R}^3 définie sur la base canonique par :

$$\phi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 6x_1 y_3 + 2x_2 y_1 - 3x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2.$$

1. Calculer $\phi(z, w)$ avec $z = (2, -1, 0)$ et $w = (5, 15, 1)$.
2. Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique. Calculer $\text{Ker } \phi$, puis son rang.
3. Écrire la matrice de ϕ dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, 1, 1)$,
 $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.
4. Calculer l'orthogonal v_1^\perp .

Vocabulaire. Soit ϕ une fbs. On définit son **rang** par $\dim E - \dim \text{Ker } \phi$.
On dit que ϕ est

- ▶ **positive** si $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{R}).
- ▶ **négative** si $\forall x \in E, \phi(x, x) \leq 0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{R}).
- ▶ **définie** si $\phi(x, x) = 0 \iff x = 0$.
- ▶ **non dégénérée** si $\text{Ker } \phi = \{0\}$ (et **dégénérée** sinon).

Lemme

Si ϕ est un fbs définie alors ϕ est non dégénérée.

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\phi(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

est une fbs non dégénérée et non définie.

Supposons ϕ dégénérée,
il existe $x \in \text{Ker } \phi, x \neq 0$
d'où $\forall y, \phi(x, y) = 0$
En particulier
 $\phi(x, x) = 0$ avec $x \neq 0$
Contradiction

Forme quadratique. Application de $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire ϕ sur E avec $q(x) = \phi(x, x)$ pour tout $x \in E$. Sous forme matricielle, on a

$$q(2x) = \phi(2x, 2x) = 4\phi(x, x) = 4q(x)$$

$$q(x) = X^t A X.$$

Ce n'est pas linéaire (sauf si nulle)

Théorème

Soit q forme quadratique, alors il existe une **unique fbs** ϕ telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \phi(x, x)$. On l'appelle la **forme polaire** de q .

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

$$\frac{(n+1)n}{2}$$

De plus, l'application $q \mapsto \phi$ est un isomorphisme de \mathbb{K} -ev donc l'ev des formes quadratiques est isomorphe à l'ev des matrices symétriques $n \times n$.

Forme polynômiale. L'expression $q(x)$ est un polynôme quadratique homogène en les x_1, \dots, x_n . On peut déduire l'expression de $\phi(x, y)$ (comme polynôme linéaire homogène en les $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$) par **forme polaire**

$$ax_i^2 \rightsquigarrow ax_i y_i \quad \text{et} \quad ax_i x_j \rightsquigarrow \frac{1}{2} ax_i y_j + \frac{1}{2} ax_j y_i \quad (i \neq j)$$

$$q(x) \geq 0$$

Vocabulaire. Une forme quadratique hérite de la terminologie de la fbs associée : rang, positive, négative, dégénérée, noyau, orthogonalité, etc.

Attention. $\text{Ker } q = \text{Ker } \phi$ et non $C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$, le cône isotrope. Il contient $\text{Ker } q$ (en général, strictement).

Orthogonalité. $x \perp_q y \iff x \perp_\phi y \iff q(x+y) = q(x) + q(y)$.

$$q(x+y) = \phi(x+y, x+y) = \phi(x, x) + 2\phi(x, y) + \phi(y, y) = q(x) + 2q(x, y) + q(y)$$

Réduction des formes quadratiques. Soient q forme quadratique et \mathcal{B} une base. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La base \mathcal{B} est q -orthogonale,
2. La matrice de q dans \mathcal{B} est diagonale,
3. L'expression de q sur la base \mathcal{B} est de la forme

$$q(x) = \sum_i d_i f_i(x)^2$$

avec (f_1, \dots, f_n) base de E^* .

matrice $q = \text{matrice } \phi$

(e_1, \dots, e_n) base antidiagonale de (f_1, \dots, f_n)

Théorème. Une telle base existe toujours.

Definition. deux formes quadratiques q et q' sont **congruentes** s'il existe des bases dans lesquelles elles la même matrice. C'est une relation d'équivalence.

Classification sur \mathbb{C} .

Deux formes quadratiques complexes sont congruentes ssi elles ont le même rang.

dim. n \mathbb{C}^n

$\sim a_i = b_i^2$
 $f_i = b_i^2 x_i^2 \quad a_i \neq 0$

q sur \mathbb{C}^n Gauss $\rightarrow q(x) = a_1 f_1^2 + \dots + a_r f_r^2$
 $\dots = f_1^2 + \dots + f_r^2$

Classification sur \mathbb{R} .

Théorème (Loi d'inertie de Sylvester)

Soit q forme quadratique sur \mathbb{R} . Il existe un couple d'entiers (s, t) , appelé la **signature** de q , tel que, dans toute base orthogonale (e_1, \dots, e_n) pour q , on a

q sur E

- $\rightarrow s = \#\{i : q(e_i) > 0\} \rightarrow E^+ = \text{Vect}\{e_i \mid q(e_i) > 0\}$
- $\rightarrow t = \#\{i : q(e_i) < 0\} \rightarrow E^- = \dots$

q sur \mathbb{R}^n Gauss $\left(\begin{matrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & -1 & \\ & & & \dots \\ & & & & -1 \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & & & 0 \end{matrix} \right)$

De plus $s + t$ est le rang de q et donc $\dim \text{Ker } q = \#\{i : q(e_i) = 0\}$.

Corollaire. Deux formes quadratiques réelles sont congruentes ssi elles ont la même signature.

$E = E^+ \oplus E^- \oplus \text{Ker } q$

§3. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

$$q(x) = \langle x, x \rangle$$

$$= \overline{\langle x, x \rangle}$$

$\in \mathbb{R}$

fbs sur \mathbb{R} / fbr sur \mathbb{C}

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (espaces euclidiens) ou \mathbb{C} (espaces hermitiens)

Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est **produit scalaire** (resp. **hermitien**) si elle est linéaire à gauche, définie positive et

forme quadratique associée q

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle, \quad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$q(x) > 0 \text{ si } x \neq 0$$

On en déduit l'existence d'une **norme** : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$:

$$(q(0) = 0)$$

- ▶ $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- ▶ $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ pour tous $x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$,
- ▶ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

$$q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$$

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

CS \Rightarrow inégalité

Variation

De plus, on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.



Proposition

Soit F sev de E , alors $E = F \oplus F^\perp$. En particulier, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Le vecteur y est le **projeté orthogonal** de x sur F .

Théorème (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit (a_1, \dots, a_n) une base de E . Pour $i = 1, \dots, n$, on pose

$$f_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle f_j, a_i \rangle}{\|f_j\|^2} f_j \quad \text{et} \quad e_i = \frac{1}{\|f_i\|} f_i.$$

$$\|e_i\| = 1$$

en plus

Alors la base (f_1, \dots, f_n) est orthogonale et la base (e_1, \dots, e_n) est **orthonormée**. De plus, pour $1 \leq k \leq n$, on a

$$\text{Vec}(a_1, \dots, a_k) = \text{Vec}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vec}(e_1, \dots, e_k).$$

$$F \rightarrow E$$

Corollaire

Soit (u_1, \dots, u_t) une base orthonormée de F . Alors le projeté orthogonale de x sur F est

$$\sum_{i=1}^t \langle x, u_i \rangle u_i.$$

L'application linéaire $E \rightarrow F$ qui envoie x sur son projeté orthogonal $p_F(x)$ est appelé un **projecteur orthogonal**.

Problème de minimalisation. Soit $x \in E$, il existe un unique point $y \in F$ tel que la distance $\|x - y\|$ est minimale, c'est le projeté orthogonal $p_F(x)$ sur F .

Cas particulier: \mathcal{B} est une base orthonormée de (u_1, \dots, u_s)

Calcul du projecteur orthogonal. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E et soit (u_1, \dots, u_s) une base orthonormée de F . Soient U_1, \dots, U_s les vecteurs colonnes des coordonnées de u_1, \dots, u_s dans la base \mathcal{B} . Alors la matrice de p_F dans la base \mathcal{B} est

$$U_i^t U_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P = \sum_{i=1}^s U_i U_i^t$$

*P symétrique
 $P^2 = P$*

Réciproquement, une matrice M telle que M est symétrique et $M^2 = M$ est un projecteur orthogonal.

sur $\text{Ker}(P - Id)$

Diagonalisation des endomorphismes normaux.

$$u: E \rightarrow F$$
$$u^*: F \rightarrow E$$

Soient E et F deux espaces euclidiens / hermitiens de dim. finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(F, E)$, appelé **adjoint** de u , tels que $\forall x \in E, y \in F$

$$\langle u(x), y \rangle_F = \langle x, u^*(y) \rangle_E.$$

La matrice A^* de u^* (après choix de bases) est $A^* = \overline{A}^t$ avec A matrice de u .

Une matrice A est

- ▶ **hermitienne** ou **auto-adjointe** si $A = A^*$ (= **symétrique**, cas réel).
- ▶ **unitaire** (complexe) ou **orthogonale** (réel) si $A^{-1} = A^*$
- ▶ (dans le cas carré) **normale** si $AA^* = A^*A$.

$$\rightarrow A^* = A^t$$

Remarque. Une matrice **unitaire** / **orthogonale** est une matrice de changement de bases entre deux bases orthonormées.

si $K = \mathbb{C}$

Théorème (Théorème spectral)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme est scindé dans \mathbb{K} . Alors la matrice A est normale ssi elle est diagonalisable dans une base orthonormale ssi il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1} A U$ est diagonale.

En particulier, une matrice réelle symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale.

Et, dans le cas complexe, A est hermitienne ssi ses valeurs propres sont réelles et elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Corollaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ matrice symétrique / hermitienne. Alors A est positive (resp. définie positive) ssi ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Exercice. Soit (e_1, \dots, e_n) une famille d'éléments de vecteur de E , espace euclidien de dimension finie, tous de norme 1. Montrez qu'on a, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2,$$

si et seulement si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Exercice. Calculer

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

Exercice.

1. Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique.
2. Montrer que $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle$ est égal à la plus grande valeur propre de sa partie symétrique.
3. Maximiser la quantité $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$ avec les contraintes

$$\begin{cases} a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}, \\ a_1^2 + \dots + a_4^2 = 1 \end{cases}$$

réel / *Complexe*
Groupe orthogonal / Groupe unitaire

Def

Isométrie. $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|u(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$

Proposition

$u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes à u isométrie :

- ▶ $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle_F = \langle x, y \rangle_E$
- ▶ u transforme une base orthonormée en une base orthonormée
- ▶ la matrice A de u dans une base orthonormée vérifie $A^t A = \text{Id}$, **matrice orthogonale**, pour le cas euclidien et $A^t \bar{A} = \text{Id}$, **matrice unitaire**, pour le cas hermitien.

$E=F$

$$A^* A = \text{Id}$$

Remarque. Les endomorphismes / matrices orthogonaux (resp. unitaires) forment un groupe appelé groupe orthogonal (resp. unitaire).

dim 3 $\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \text{Rot.} & & \end{array} \right)$

Théorème

Soit u endomorphisme **orthogonal** (cas euclidien). Il existe une base **orthonormée** dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec soit ± 1 , soit des **rotations du plan** (bloc 2×2) sur la diagonale.

Racine carrée et décomposition polaire

On considère \mathbb{C}^n muni du produit scalaire hermitien canonique.

1. *Racine carrée.* Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne et définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\langle x, Ax \rangle > 0$.
Montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne et définie positive H telle que $A = H^2$. On dit que H est la racine carrée positive de A .
2. *Décomposition polaire.* Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.
 - 2.1 Justifier que M^*M est hermitienne et définie positive. On note H sa racine carrée positive.
 - 2.2 On pose $U = MH^{-1}$. Montrer que U est une matrice unitaire.
 - 2.3 En déduire que M s'écrit de manière unique sous la forme $M = HU$ avec U unitaire et H hermitienne définie positive.

§4. Décompositions

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A admet une décomposition LU s'il existe une matrice triangulaire inférieure L et une matrice triangulaire supérieure U avec des 1 sur la diagonale telles que $A = LU$.

Théorème

Supposons A inversible. Alors il existe une matrice de permutations P telle que PA admet une unique décomposition LU.

Si A est symétrique définie positive, alors A admet une unique décomposition LU.

chaque ligne donne un 1, reste 0

Utilisations. résolution de systèmes linéaires avec membres de droite différents, inversion de matrices, calculs de déterminants, etc.

sys. Cramer

Méthode. On fait un pivot de Gauss pour mettre sous forme triangulaire supérieure (en mettant le pivot égal à 1 à chaque fois). Les transformations effectuées donnent la matrice L . Si un pivot est nul, on échange les lignes pour avoir un pivot non nul (ce qui donne P). Coût cubique.

Théorème

Soit matrice A **symétrique** et **définie positive**. Il existe une unique matrice triangulaire inférieure L avec des coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = LL^t$. C'est la **décomposition de Cholesky**.

Exercice. Soit A la matrice

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, Ax \rangle = (2x_1 + x_2 + x_3)^2 + (3x_2 + 2x_3)^2 + (4x_3)^2$$

OK
5 ans

1. Montrer que la matrice A est symétrique et définie positive.
2. Calculer la factorisation de Cholesky de A .
3. Résoudre $Ax = b$ avec $b = (0, 0, 96)^t$ en utilisant la deuxième question.

$$\langle x, LL^t x \rangle = \langle x, Ax \rangle$$

$$\|L^t x\|^2 = \langle x, Ax \rangle$$

$$(2x_1 + x_2 + x_3, 3x_2 + 2x_3, 4x_3)$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \\ 4x_3 \end{pmatrix} = L^t x$$

Une matrice A admet une **décomposition QU** (ou QR) s'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = QU$.

Particulièrement utile quand A est rectangle pour calculer le pseudo-inverse de A :

$$AX = Y \iff UX = Q^t Y \quad \text{Id}$$

$$QUX = Y \iff Q^t Q U X = Q^t Y$$

Méthode. On fait la méthode de Gram-Schmidt sur les colonnes a_j de A . La base orthonormée (e_i) obtenue donne la matrice Q . La matrice R a pour entrées $\langle e_i, a_j \rangle$ pour $i \leq j$ (et zéro ailleurs).

||
U

Remarques. La méthode est plus couteuse que la méthode LU et susceptible aux problèmes d'arrondis dans Gram-Schmidt.

C'est la base de la méthode QR pour le calcul (d'approximations) des valeurs propres.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Exercice.

- ▶ Calculer la décomposition LU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ▶ Calculer la décomposition QU de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{175} \begin{pmatrix} 150 & -69 & -58 \\ 75 & 158 & 6 \\ -50 & 30 & -165 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

Lemme

Soit A une matrice (non nécessairement carrée). Alors, la matrice A^*A est hermitienne positive. En particulier, ses valeurs propres sont des réels positifs. On appelle **valeurs singulières** de A les racines carrées des valeurs propres de A^*A .

Remarque. si A est déjà hermitienne, on obtient les ~~modules~~ de ses valeurs propres.

les valeurs absolues

Décomposition en valeurs singulières. Supposons que $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ admette r valeurs singulières non nulles $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_r$. Alors, il existe deux matrices unitaires $U \in M_n(\mathbb{K})$ et $V \in M_m(\mathbb{K})$ telles que

$$A = V \hat{D} U^* \quad \text{avec} \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \boxed{D} & \begin{matrix} 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,n-r} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0_{m-r,r} \\ 0_{m-r,n-r} \end{matrix} & \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

avec $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r)$.

§5. Normes matricielles

Rappel. Puisque $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -ev de dimension finie, toutes les normes sur $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

On dit qu'une norme $\| \cdot \|$ sur $M_n(\mathbb{K})$ est une **norme matricielle** si

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Pour $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, la **norme de Frobenius** définie par

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

est une norme matricielle. C'est une conséquence de Cauchy-Schwarz.

La norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{i,j}|$ n'est pas une norme matricielle.

Pour $\|\cdot\|$ une norme fixée de \mathbb{K}^n , la **norme subordonnée** est la norme $\|\cdot\|$ de $M_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Proposition

Soit une norme $\|\cdot\|$ de \mathbb{K}^n , on a

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \forall x \in \mathbb{K}^n : \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}),$ il existe $x \in \mathbb{K}^n$ avec $\|A\| = \|Ax\|$ et $\|x\| \leq 1.$
3. $\|\mathbf{1}_n\| = 1.$
4. La norme subordonnée $\|\cdot\|$ est une norme matricielle.

Remarque. Puisque $\|\mathbf{1}_n\|_F \neq 1$, la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.

Soit $\|\cdot\|_2$ la norme subordonnée associée à la norme euclidienne sur \mathbb{K}^n .

Propriétés.

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \|A\|_2 = \|A^*\|_2 =$ plus grande valeur singulière de A .
2. $\forall A, U \in M_n(\mathbb{K})$ avec U unitaire, $\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|A\|_2$.
3. En particulier, si A unitaire, $\|A\|_2 = \rho(A)$ avec $\rho(A) = \max.$ des modules des valeurs propres de A est le **rayon spectral** de A .

Théorème

Pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbb{C})$, on a

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \rho(A) \leq \|A\|$$

Réciproquement, soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

La suite $(A_k)_k$ de $M_n(\mathbb{K})$ **tend vers** A si on a $\|A - A_k\| \rightarrow 0$.

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_k A^k = 0$,
2. $\forall x \in \mathbb{C}^n, \lim_k A^k x = 0$,
3. $\rho(A) < 1$,
4. Il existe une norme matricielle $\|\cdot\|$ pour laquelle $\|A\| < 1$.

Remarque. Soit $\sum_k a_k z_k$ une série entière de rayon de convergence R , on en déduit que la même série converge pour une matrice A avec $\rho(A) < R$. Cela permet de construire l'analogie des fonctions classiques exp, cos, sin...

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle. On a

$$\lim_k \|A^k\|^{1/k} = \rho(A).$$

Norme et inversibilité.

Soit $A \in \text{GL}_n(K)$. On note $\|\cdot\|$ une norme sur K^n et $\|\|\cdot\|\|$ la norme subordonnée associée.

1. Montrer que pour tout $x \in K^n$, on a $\|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\|\|A^{-1}\|\|}$.
2. Soit $E \in M_n(K)$ une matrice telle que $\|\|E\|\| < \frac{1}{\|\|A^{-1}\|\|}$. Montrer que pour tout $x \in K^n$, on a

$$\|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{\|\|A^{-1}\|\|} - \|\|E\|\| \right) \|x\|.$$

En déduire que $A + E$ est inversible.

3. Comment s'énonce le résultat qu'on vient de montrer si $A = I_n$?