Algèbre linéaire et bilinéaire, Analyse matricielle

1. Dualité
2. Formes bilinéaires et formes quadratiques
3. Espaces euclidiens, espaces hermitiens
4. Décompositions
5. Normes matricielles

§1. Dualité

Notations. E espace-vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Une forme linéaire est application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$ ← ev de dim. 1

L'ensemble des formes linéaires $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est le dual de E, c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n aussi.

Th. rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang} f$, $\operatorname{rang} f = 0$ ou 1

Résultats.

- Une forme linéaire (f) est nulle ou surjective.
- Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan (dim. $n-1$) et la réciproque est aussi vraie.
- Deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

$f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ $\quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \Rightarrow \exists \lambda \neq 0,\ f = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Les applications $e_1^*, \dots, e_n^* : E \to \mathbb{K}$ telles que, $\forall x \in E$,

$$\boxed{x = e_1^*(x)\, e_1 + \cdots + e_n^*(x)\, e_n}$$

$e_i^*(x+y) = e_i^*(x) + e_i^*(y)$

sont des formes linéaires. La famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée la base duale de $(e_1, \dots, e_n)$.

bases de $E \hookrightarrow$ bases de E^*

Théorème

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors, e_i^* est l'unique élément de E^* tel que, pour tout j, on a

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

$e_j = 0 \times e_1 + \dots + 1 \times e_j + \dots + 0 \times e_n$

Théorème

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E avec $f_i = e_i^*$, $\forall i$..On l'appelle la base antéduale de la base $(f_1, \dots, f_n)$.

transposé

Exercice. Calculer la base duale de la base de $\mathbb{R}^3$: ${}^t(1, 1, 1)$, ${}^t(1, 0, -1)$, ${}^t(0, 1, 1)$.

§2. Formes bilinéaires et formes quadratiques

Forme bilinéaire : application $\phi\ : E \times E \to \boxed{\mathbb{K}}$ linéaire par rapport à chaque variable. L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel de dimension n^2.

ϕ fb $\quad x \in E$ fixé $\quad y \mapsto \phi(x,y)$ forme linéaire

Sur $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, base de E, on écrit $x = \sum_i x_i\, e_i$, et $y = \sum_i y_i\, e_i$. On a

forme biliv.

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, \underbrace{\phi(e_i, e_j)} = \boxed{X^t\, A\, Y}$$

avec $A = (\phi(e_i, e_j)) \in M_n(\mathbb{K})$, matrice représentant ϕ sur la base $\mathcal{B}$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (resp. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$) le vecteur représentant x (resp. y) sur la base. $\mathcal{B}$

$\mathcal{B} = (e_i) \quad \mathcal{B}' = (e_i')$

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base E, la matrice A' de ϕ sur la base $\mathcal{B}'$ vérifie :

$$\boxed{A' = P^t A P}$$

$$P = \begin{array}{c|c} & e_1' \cdots e_n' \\ \hline \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$e_1' = a_{11} e_1 + \cdots + a_{n1} e_n$

avec P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Remarque. $P = \cancel{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})}$. (Attention. notation !)

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})$

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique (fbs), c'est-à-dire $\forall x, y$, $A^t = A$

$\phi(x, y) = \phi(y, x) \iff$ la matrice de ϕ (dans toute base) est symétrique.

(Aussi possible forme bilinéaire alternée ou anti-symétrique.)

$\phi(x,x) = 0$ $\quad = \quad$ ↳ $\phi(x,y) = -\phi(y,x)$

Pour $x, y \in E$, on dit x et y orthogonaux, noté $x \perp_\phi y$, si $\phi(x, y) = 0$.

Si $x \perp x$, on dit x isotrope.

↳ par rapport ϕ

$S \neq \emptyset$

Pour $S \subseteq E$, on pose $S^{\perp_\phi} = \{x \in E \mid \forall y \in S, \phi(x, y) = 0\}$. C'est toujours un sev de E. En fait, pour $S^\perp = \mathrm{Vec}(S)^\perp$.

↳ $S^\perp = \bigcap_{y \in S} y^\perp$

sev engendré par S

On note $\mathrm{Ker}\,\phi = E^{\perp_\phi}$, noyau de ϕ. Le rang de ϕ est $\dim E - \dim \mathrm{Ker}\,\phi$.

$x \in E$ si $\forall y \in E$, $\phi(x,y) = 0$

F sev $(f_1, \dots, f_m)$ génératrice de F

Lemme

Soit A matrice de ϕ dans une base, alors $\mathrm{Ker}\,\phi = \mathrm{Ker}\,A$.

rang ϕ = rang A $\qquad F^\perp = \bigcap_i f_i^\perp$

Théorème

Pour F sev de E, on a $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(E^\perp \cap F)$.

Si $E^\perp = \{0\}$ (non dégénérée) alors $F \oplus F^\perp = E$.

↳ $E^\perp \cap F = \{0\}$ $\qquad \dim E = \dim F + \dim F^\perp$ $\qquad$ ↳ $\dim E \leq \dim F + \dim F^\perp$

or $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ // $\Rightarrow E = F \oplus F^{\perp}$

$x = y + z \quad y \perp z$

Exercice.

Soit la forme bilinéaire ϕ de $\mathbb{R}^3$ définie sur la base canonique par :

$$\phi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 6x_1 y_3 + 2x_2 y_1 - 3x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2.$$

1. Calculer $\phi(z, w)$ avec $z = (2, -1, 0)^t$ et $w = (5, 15, 1)^t$.
2. Ecrire la matrice de ϕ dans la base canonique. Calculer $\mathrm{Ker}\,\phi$, puis son rang.
3. Écrire la matrice de ϕ dans la base (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, 1, 1)^t$, $v_2 = (0, 1, 1)^t$, $v_3 = (0, 0, 1)^t$.
4. Calculer l'orthogonal $v_1^{\perp}$.

Vocabulaire. Soit ϕ une fbs. On définit son rang par $\dim E - \dim \operatorname{Ker} \phi$.
On dit que ϕ est

- positive si $\forall x \in E$, $\phi(x,x) \geq 0$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R})$.
- négative si $\forall x \in E$, $\phi(x,x) \leq 0$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R})$.
- définie si $\phi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
- non dégénérée si $\operatorname{Ker} \phi = \{0\}$ (et dégénérée sinon).

Lemme

Si ϕ est un fbs définie alors ϕ est non dégénérée.

Supposons ϕ dégénérée,
il existe $x \in \operatorname{Ker} \phi$, $x \neq 0$
d'où $\forall y$ $\phi(x,y) = 0$
En particulier
$\phi(x,x) = 0$ avec $x \neq 0$
Contradiction

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\phi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

est une fbs non dégénérée et non définie.

Forme quadratique. Application de $q : E \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire ϕ sur E avec $q(x) = \phi(x,x)$ pour tout $x \in E$. Sous forme matricielle, on a

$$q(x) = X^t AX.$$

$q(2x) = \phi(2x, 2x)$

$= 4\phi(x,x) = 4q(x)$

Ce n'est pas linéaire (sauf si nulle)

Théorème

Soit q forme quadratique, alors il existe une unique fbs ϕ telle que, pour tout $x \in E$, $q(x) = \phi(x,x)$. On l'appelle la forme polaire de q.

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)).$$

$\frac{(n+1)n}{2}$

De plus, l'application $q \mapsto \phi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev donc l'ev des formes quadratiques est isomorphe à l'ev des matrices symétriques $n \times n$.

Forme polynômiale. L'expression $q(x)$ est un polynôme quadratique homogène en les $x_1, \ldots, x_n$. On peut déduire l'expression de $\phi(x,y)$ (comme polynôme linéaire homogène en les $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$) par forme polaire

$$\boxed{ax_i^2 \rightsquigarrow ax_iy_i} \quad \text{et} \quad \boxed{ax_ix_j \rightsquigarrow \tfrac{1}{2}ax_iy_j + \tfrac{1}{2}ax_jy_i} \quad (i \neq j)$$

$q(x) \geq 0$

Vocabulaire. Une forme quadratique hérite de la terminologie de la fbs associée : rang, positive, négative, dégénérée, noyau, orthogonalité, etc.

Attention. $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} \phi$ et non $C(q) = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$, le cône isotrope. Il contient $\operatorname{Ker} q$ (en général, strictement). n'est pas un sev

Orthogonalité. $x \perp_q y \iff x \perp_\phi y \iff q(x+y) = q(x) + q(y)$.

$q(x+y) = \phi(x+y, x+y) = \phi(x,x) + 2\phi(x,y) + \phi(y,y) = q(x) + q(y)$

$\phi(x,y) = 0$ si $x \perp y$

Réduction des formes quadratiques. Soient q forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La base $\mathcal{B}$ est q-orthogonale,
2. La matrice de q dans $\mathcal{B}$ est diagonale, matrice q = matrice ϕ
3. L'expression de q sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\boxed{q(x) = \sum_i d_i\, f_i(x)^2}$$

$d_i \in K$

avec $(f_1, \ldots, f_n)$ base de E^*. → $(e_1, \ldots, e_n)$ base antéduale de $(f_1, \ldots, f_n)$

Théorème. Une telle base existe toujours.

A matrice symmétrique

Trouver P inversible telle que $P^t A P$ diagonale $\to$ base orthogonale

Réduction de Gauss.

Réduire les formes quadratiques suivantes :

- $$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 14x_2x_4 + 5x_3^2 - 8x_3x_4 + 10x_4^2.$$

- $$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_3x_4.$$