Chapitre 1

Espaces topologiques

1.1 Notion de topologie, ouverts

Définition 1. *On appelle* **espace topologique** *un couple* $(X, \mathcal{T})$ *où* X *est un ensemble et* $\mathcal{T}$ *une famille de parties de* X *vérifiant :*

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,

(T2) Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ *appartient à* $\mathcal{T}$,

(T3) Une reunion quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$ *appartient à* $\mathcal{T}$.

On appelle $\mathcal{T}$ *la topologie sur* X.

Exemple 1. $X = \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{T}$ la famille des ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2. X avec $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. On appelle $\mathcal{T}$ la topologie chaotique.

Exemple 3. X avec $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, la famille de toutes les parties de X. On appelle $\mathcal{T}$ la topologie discrete.

On peut construire des topologies à l'aide de *distances*.

Définition 2. *Soit* X *un ensemble non vide. Une* **distance (métrique)** *sur* X *est une application* $(x, y) \mapsto d(x, y)$ *de* $X \times X$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*

(D1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(D2) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall\, x, y \in X$,

(D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall\, x, y, z \in X$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 4. $X = \mathbb{R}^n$ avec

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

$x, y \in \mathbb{R}^n$. C'est la distance Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5. Sur tout ensemble non vide X on peut définir une distance. Par exemple, en posant

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 1, & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

C'est la distance “discrète” sur X.

Définition 3. *Un* **espace métrique** *est un couple* (X, d)*, où* d *est une distance sur* X*.*

Définition 4. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Pour* $x \in X$ *et* $r > 0$*, on définit :*
a) la **boule ouverte** *de centre* x *et rayon* r *:* $B(x,r) = \{y \in X \ ; \ d(y,x) < r\}$ *;*
b) la **boule fermée** *de centre* x *et rayon* r *:* $\overline{B}(x,r) = \{y \in X \ ; \ d(y,x) \leq r\}$*.*

Exemple 6. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $B(1,1) =]0,2[$.

Définition 5. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Par définition, une partie non-vide* U *de* X *est un* **ouvert** *si, pour tout* $x \in U$*, il existe un* $r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subset U$*. Par définition* $\emptyset$ **est un ouvert***.*

N. B. En principe, r dépend de x.

Exemple 7. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $U =]0,1[$ est un ouvert. En effet, si on pose, pour $x \in U$, $r = \min\{x, 1-x\}$, on vérifie aisément que $B(x,r) \subset U$.

Proposition 1. *Soit* (X, d) *un espace métrique.*

1. *Une intersection finie d'ouverts est ouverte.*
2. *Une reunion quelconque d'ouverts est ouverte.*

Démonstration. 1) Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. On a $x \in U_i$, $i = 1, \ldots, n$. Chaque U_i étant ouvert, il existe un $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$. Soit $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Alors $B(x,r) \subset B(x, r_i)$, $i = 1, \ldots, n$, et donc $B(x,r) \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$. Il s'ensuit que $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.
2) Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. U_{i_0} étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_{i_0}$. Pour ce même r, on a $B(x,r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. □

Définition 6. *Soit* (X, d) *un espace métrique. La* **topologie métrique** *de* (X, d) *est*

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \ ; \ U \text{ est un ouvert}\}.$$

Donc on peut voir un espace métrique comme un cas particulier d'un espace topologique.

Terminologie. On appelle les éléments d'une topologie $\mathcal{T}$ aussi les ouverts de l'espace $(X, \mathcal{T})$.

Définition 7. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit que X est un espace de* **Hausdorff**, *ou séparé, si pour deux points x, y distincts on trouve deux ouverts $U, V \in \mathcal{T}$, t.q. $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Proposition 2. *Un espace métrique est un espace de Hausdorff (pour la topologie métrique).*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $x, y \in X$, $x \neq y$. Alors $\rho = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. On pose $U = B(x, \rho)$ et $V = B(y, \rho)$. Supposons que $z \in U \cap V$. Alors

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \rho + \rho = d(x, y).$$

Ceci est une contradiction. Donc $U \cap V = \emptyset$ et X est Hausdorff. □

Exemple 8. On revient à l'exemple de la topologie chaotique, X avec $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Le seul ouvert qui contient un point de X est X lui-même. Donc si X contient deux points, ces deux points ne peuvent pas être dans deux ouverts différents. Alors si X contient plus qu'un point il n'est pas Hausdorff.

Définition 8. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un ensemble $F \subset X$ est* **fermé** *si son complémentaire F^c est ouvert, c.-à.-d. si $F^c \in \mathcal{T}$.*

Exemple 9. $\emptyset$ et X sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 3. *Dans un espace de Hausdorff X tout ensemble fini est fermé.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\{x\}$ est fermé, où $x \in X$. Soit $y \in \{x\}^c$ (on suppose que X a plus qu'un point.) Alors on peut choisir un ouvert $V_y \subset X$ qui contient y mais pas x. Il s'ensuit que $\{x\}^c = \bigcup_{y \in \{x\}^c} V_y$ qui est alors reunion des ouverts, donc ouvert. □

Proposition 4. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $B(x, r)$ est un ouvert.*
2. *Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $\overline{B}(x, r)$ est un fermé.*

Démonstration. 1) Soit $y \in B(x, r)$. On a $\rho = r - d(y, x) > 0$. On va prouver que $B(y, \rho) \subset B(x, r)$. En effet,

$$z \in B(\rho, y) \Longrightarrow d(z, y) < \rho \Longrightarrow d(x, z) \leq d(z, y) + d(y, x) < \rho + d(y, x) = r \Longrightarrow z \in B(x, r).$$

2) On doit montrer que $\overline{B}(x, r)^c$ est un ouvert. Soit $y \in \overline{B}(x, r)^c$; y satisfait donc $d(y, x) > r$. Soit $\rho = d(y, x) - r > 0$. On a

$$z \in B(y, \rho) \Longrightarrow d(z, x) \geq d(y, x) - d(z, y) > d(y, x) - \rho = r \Longrightarrow z \in \overline{B}(x, r)^c \ ;$$

autrement dit, on a $B(y, \rho) \subset B(x, r)^c$. □

Proposition 5. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors*

1. *Une reunion finie de fermés est fermé.*
2. *Une intersection quelconque de fermés est fermé.*

Démonstration. 1) Soient F_i, $i = 1, \dots, n$ des fermés. Alors $U_i = F_i^c$ sont ouverts. On a

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} X \backslash U_i = X \backslash \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

ce qui est fermé car par (T2) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est ouvert.
2) Soient F_i, $i \in I$ des fermés et $U_i = F_i^c$. On a

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} X \backslash U_i = X \backslash \bigcup_{i \in I} U_i$$

ce qui est fermé car par (T3) $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert. □

1.2 Espaces normés

Définition 9. *Soit E un espace vectoriel réel. Une* **norme** *sur E est une application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ telle que :*
(N1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
(N2) $|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ x \in E$;
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\ x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Exemple 10. On rappelle que, dans $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$ est une norme (la **norme euclidienne standard**) ; ici, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 11. On vérifie aisément que, dans $\mathbb{R}^n$, les formules $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ définissent des normes.

Exemple 12. Pour $1 < p < \infty$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ (pour $p = 2$, on retrouve le cas particulier de la norme euclidienne). $\| \ \|_p$ vérifie clairement (N1) et (N2). On peut montrer que $\| \ \|_p$ vérifie aussi (N3) ; c'est l'inégalité de Minkowski prouvée à la fin de ce chapitre. Par conséquent, $\| \ \|_p$ est une norme.

Sur $\mathbb{R}$, toutes les normes définies ci-dessus coïncident avec l'application $x \mapsto |x|$. Cette norme est la **norme usuelle** sur $\mathbb{R}$.

Définition 10. *Un* **espace normé** *est un couple $(E, \| \ \|)$, où $\| \ \|$ est une norme sur E.*

Proposition 6. *Un espace normé* $(E, \| \ \|)$ *est un espace métrique pour la métrique* $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall\ x, y \in X$.

Démonstration. (D1) découle de (N1). Pour vérifier (D2), on note que

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

(D3) est une conséquence de (N3) :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

□

1.3 Intérieur, adhérence

Définition 11. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique. Pour* $A \subset X$*, on définit l'***intérieur de** A, $\overset{\circ}{A}$, *par*

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert},\ U \subset A} U$$

*et l'***adhérence de** A, $\overline{A}$, *par*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ fermé},\ F \supset A} F.$$

Proposition 7. *Soit* A *une partie d'un espace topologique.*
a) $\overset{\circ}{A}$ *est un ouvert contenu dans* A.
b) Si U *est un ouvert et* $U \subset A$*, alors* $U \subset \overset{\circ}{A}$.
Autrement dit, $\overset{\circ}{A}$ *est le plus grand ouvert contenu dans* A.
a') $\overline{A}$ *est un fermé contenant* A.
b') Si F *est un fermé et* $F \supset A$*, alors* $F \supset \overline{A}$.
Autrement dit, $\overline{A}$ *est le plus petit fermé contenant* A.

Démonstration. a) $\overset{\circ}{A}$ est une union d'ouverts contenus dans A, donc un ouvert contenu dans A. b) Par définition ! La preuve est identique pour a'), b'). □

Exemple 13. On considère, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, $A = [0, 1[$. Alors $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$ et $\overline{A} = [0, 1]$.

En effet, $]0, 1[$ est un ouvert contenu dans A, $[0, 1]$ est un fermé contenant A, et donc $]0, 1[\subset \overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A} \subset [0, 1]$. On a donc soit $\overset{\circ}{A} = A$, soit $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$. Pour éliminer la première possibilité, on montre que A n'est pas un ouvert. Par l'absurde : sinon, il existe un $r > 0$ tel que $B(0, r) =]-r, r[\subset A$. Or, $-r/2 \in B(0, r)$, mais $-r/2 \notin A$. Contradiction. Pour $\overline{A}$, il y a aussi deux possibilités : $\overline{A} = [0, 1]$ ou $\overline{A} = A$. On n'est pas dans le deuxième cas, car A n'est pas fermé. Ceci revient à montrer que $A^c =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ n'est pas un ouvert et se démontre par l'absurde (il n'y a pas de $r > 0$ tel que $B(1, r) \subset A^c$).

Proposition 8. *Soient A et B deux parties d'un espace topologique.*

1. *On a $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
2. *$\mathring{A} = X \setminus \overline{A^c}$ et $\overline{A} = X \setminus \mathring{A^c}$.*

Démonstration. 1. Evident.

2. On prouve la première égalité, qui revient, après passage au complémentaire, à $X \setminus \mathring{A} = \overline{A^c}$. (En l'appliquant à A^c on obtient la seconde égalité.) On a

$$\mathring{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert, } U \subset A} U \Longrightarrow X \setminus \mathring{A} = \bigcap_{U \text{ ouvert, } U \subset A} U^c = \bigcap_{F \text{ fermé, } F \supset A^c} F = \overline{A^c}.$$

□

Proposition 9. *Dans un espace topologique,*

1. *U ouvert $\Longleftrightarrow U = \mathring{U}$.*
2. *F fermé $\Longleftrightarrow F = \overline{F}$.*

Démonstration. 1. "$\Longleftarrow$" est claire, car $\mathring{U}$ est un ouvert. Réciproquement, si U est ouvert, alors le point b) de la proposition précédente implique $U \subset \mathring{U}$. Par ailleurs, on a toujours $U \supset \mathring{U}$, d'où l'égalité voulue.

2. Par passage au complémentaire de a) : F fermé$\Longleftrightarrow F^c$ ouvert$\Longleftrightarrow F^c = \mathring{F^c} = X \setminus \overline{F} \Longleftrightarrow F = \overline{F}$.

□

Proposition 10. *Dans un espace topologique*

1. *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*
2. *$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. En général, l'inclusion est stricte.*
3. *$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.*
4. *$\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$. En général, l'inclusion est stricte.*

Démonstration. 1. $A \subset A \cup B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$; de même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ et par conséquent $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Par ailleurs, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$ et donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. Comme $A \cap B \subset A$, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$; de même, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, d'où $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
Un exemple d'inclusion stricte : dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on prend $A = [0,1[$, $B =]1,2]$. On a vu que $\overline{A} = [0,1]$; par le même raisonnement, $\overline{B} = [1,2]$. Alors $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$, mais $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

3. Comme dans 2, on a $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Par ailleurs, $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.

4. L'inclusion se montre comme dans 1. Un exemple d'inclusion stricte : on prend A, B comme dans 2. Alors (pourquoi ?) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} =]0,2[$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,2[\setminus \{1\}$.

□

1.4 Voisinage d'un point

Définition 12. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On appelle voisinage de $x \in X$ toute ensemble $V \subset X$ qui contient un ouvert U qui contient x. Un pose $\mathcal{V}_x$ la famille des voisinages de x.*

Proposition 11. *Soit A une partie d'un espace topologique.*

1. *$x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si A contient un voisinage de x.*
2. *$x \in \overline{A}$ si et seulement si A intersecte tout voisinage de x.*

Démonstration. 1. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de x qui est contenu dans A.
On suppose que A contient un voisinage de x. Alors il existe un ouvert U t.q. $x \in U \subset A$. Donc par definition de l'interieur $x \in U \subset \overset{\circ}{A}$.

2. $x \in \overline{A}$ ssi $x \notin \overline{A}^c = \overset{\circ}{A^c}$ ssi A^c ne contient pas de voisinage de x ssi A intersecte tout voisinage de x.

□

1.5 Suites

Si (x_n) est une suite, on notera une suite extraite (=sous-suite) soit par (x_{n_k}), soit par $x_{\varphi(n)}$. Dans le premier cas, $n_0, n_1, ...$, est une suite strictement croissante d'entiers ; dans le second, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.
Par abus de notation, si tous les termes d'une suite (x_n) appartiennent à un ensemble X, on écrit $(x_n) \subset X$.

Définition 13. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Si $(x_n) \subset X$ et $x \in X$, alors, par définition, $x_n \to x$ ((x_n)* **converge** *vers x) si et seulement si tout voisinage de x contient presque tout point de la suite, c.-à.-d.*

$$\forall V \in \mathcal{V}_x \; \exists, N_V \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_V : x_n \in V.$$

Une suite (x_n) est convergente s'il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. On écrit alors $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Il est évident, à partir de la définition, que si $(x_n) \to x$ et si (x_{n_k}) est une sous-suite, alors $x_{n_k} \to x$.

Exemple 14. $(X, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Alors le seul voisinage d'un point est X. Il s'ensuit que chaque point de X est limite de chaque suite de X !

Exemple 15. $(X, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Alors $\{x\}$ est un ouvert donc un voisinage. Il s'ensuit qu'une suite (x_n) converge vers x si et seulement si $\exists N \forall n \geq N : x_n = x$.

Proposition 12. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff. Alors une suite converge vers au plus un point de X.*

Démonstration. Supposons que x et y sont limite d'une suite (x_n). Si $x \neq y$ il existe deux ouverts disjoints, U et V, $x \in U$, $y \in V$. Mais $U \cap V$ est un voisinage de x et contient donc presque tout point de la suite. Contradiction ! □

Proposition 13. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors (x_n) converge vers x si et seulement si $d(x_n, x) \to 0$ où encore*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad \forall n \geq N_\epsilon : d(x_n, x) < \epsilon.$$

Démonstration. $x = \lim_n x_n$ si et seulement si tout voisinage de x contient presque tout point de (x_n). Ceci est équivalent à dire que tout ouvert contenant x contient presque tout point de (x_n). Ceci est équivalent à dire que toute boule ouverte de centre x contient presque tout point de (x_n). □

1.6 Caractérisation des ensembles à l'aide des suites

Pour cette section on demande que (X, d) soit un espace métrique.

Proposition 14. *Soit (X, d) un espace métrique et $F \subset X$. Alors*

$$\overline{F} = \{x \in X \; ; \; \exists \, (x_n) \subset F \text{ telle que } x_n \to x\}.$$

Démonstration. "$\supset$" On considère un x appartenant à l'ensemble de droite. Soit $r > 0$. Il existe n_0 tel que $d(x_n, x) < r$, $n \geq n_0$. En particulier, $x_{n_0} \in B(x, r) \cap F$, et donc $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$, d'où $x \in \overline{F}$.
"$\subset$" Soit $x \in \overline{F}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère un $x_n \in F \cap B(x, 1/(n+1))$. Alors $(x_n) \subset F$, $d(x_n, x) < 1/(n+1)$ et donc $x_n \to x$. □

Corollaire 1. *F est un fermé $\Longleftrightarrow$ pour toute suite convergente $(x_n) \subset F$ on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in F$.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" Si x est tel qu'il existe une suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$, alors $x \in \overline{F} = F$.
"$\Longleftarrow$" Si $x \in \overline{F}$, il existe une suite $(x_n) \subset F$ telle que $x_n \to x$. Par conséquent, $x \in F$, et donc $\overline{F} \subset F$. Comme on a toujours $F \subset \overline{F}$, on trouve $F = \overline{F}$, et donc F est fermé. □

1.7 Comparaison des topologies sur un même espace

Définition 14. *Soit X un ensemble et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur X. On dit que la topologie $\mathcal{T}_1$ est plus grossière que $\mathcal{T}_2$ (ou $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$) si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.*

Remarque 1. Si une suite (x_n) converge vers x pour la topologie $\mathcal{T}_2$ (qui est plus fine que $\mathcal{T}_1$) alors elle converge aussi vers x pour la topologie $\mathcal{T}_1$.

Définition 15. *Soit E un espace vectoriel. Deux normes $\| \; \|_1$, $\| \; \|_2$ sur E sont* **équivalentes** $\Longleftrightarrow$ *$\exists \; C_1, C_2 > 0$ telles que $C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \quad \forall \; x \in E$.*

Définition 16. *Soit X un ensemble non vide. Deux distances d_1, d_2 sur X sont* **équivalentes** $\Longleftrightarrow$ $\exists\ C_1, C_2 > 0$ *telles que* $C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y), \quad \forall\ x, y \in X$.

Il est facile de vérifier que l'équivalence des normes ou distances est, comme son nom l'indique, une relation d'équivalence.
Le résultat suivant est évident :

Proposition 15. *Soit $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ deux normes équivalentes sur E. Alors les distances associées à $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ sont équivalentes.*

Proposition 16. *Soit d_1, d_2 deux distances équivalentes sur l'ensemble X. Alors les topologies ils definissent sont les mêmes. Plus précisement :*
a) $x_n \to x$ dans $(X, d_1) \Longleftrightarrow x_n \to x$ dans (X, d_2) ;
b) les fermés de (X, d_1) et de (X, d_2) coïncident ;
c) les ouverts de (X, d_1) et de (X, d_2) coïncident.

Démonstration. a) Exercice ! b) C'est une conséquence de a) et de la caractérisation des fermés à l'aide des suites. c) Par passage au complémentaire de b). □

On montrera plus tard le résultat fondamental suivant :

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel réel* **de dimension finie**. *Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Il s'ensuit que, pour ce qui concerne les ouverts, fermés, suites convergentes, le choix de la norme sur un tel espace est immatériel. En particulier, on ne précisera pas la norme sur E. Par exemple, "Dans $\mathbb{R}^n$, ..." sous-entend "Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme (et de la distance associée), ...".

1.8 Construction des espaces topologiques

1.8.1 Sous-espace

Définition 17. *Soit $A \subset X$ une partie d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On pose*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A | U \in \mathcal{T}\}$$

et l'appelle la topologie **induite** *sur A (ou la topologie* **relative** *sur A).*

Lemme 1. *$\mathcal{T}_A$ est une topologie sur A.*

Démonstration. (T1) $\emptyset = \emptyset \cap A$ et $X = X \cap A$ donc $\emptyset, X \subset \mathcal{T}_A$.

(T2) Soit I fini alors $\bigcap_{i \in I}(U_i \cap A) = (\bigcap_{i \in I} U_i) \cap A$. Alors une intersection finie d'ensembles de la forme $U_i \cap A$, U_i ouvert, est ouverte pour la topologie induite.

(T3) Soit I quelconque alors $\bigcup_{i\in I}(U_i \cap A) = (\bigcup_{i\in I} U_i) \cap A$. Alors une reunion quelconque d'ensembles de la forme $U_i \cap A$, U_i ouvert, est ouverte pour la topologie induite.

□

Proposition 17. *Soit $A \subset X$ une partie d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ et $x \in A$. Alors V est un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}_A$ si et seulement s'il existe un voisinage $W \subset X$ pour x (pour la topologie $\mathcal{T}$), tel que $V = W \cap A$.*

Démonstration. Soit V un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}_A$. Alors il existe $U \in \mathcal{T}_A$ t.q. $x \in U \subset V$. Alors il existe $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ t.q. $U = \tilde{U} \cap A$. Pose $W = \tilde{U} \cup V$. Alors W est voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}$ et $V = W \cap A$.

Soit W voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}$. Alors il existe $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ t.q. $x \in \tilde{U} \subset W$. Pose $V = W \cap A$. Alors $U = \tilde{U} \cap A$ est un ouvert de $\mathcal{T}_A$ qui contient x et est contenu dans V. Donc V est voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}_A$. □

Proposition 18. *Soit $A \subset X$ une partie d'un espace métrique (X, d). Soit d_A la restriction de d sur $A \times A$. Alors (A, d_A) est un espace métrique et $\mathcal{T}_A$ est la topologie métrique de d_A.*

Démonstration. On utilise que $B_{d_A}(x, r) = B_d(x, r) \cap A$. □

1.8.2 Produit d'espaces

Définition 18. *Soient $(X_k, \mathcal{T}_k)$, $1 \leq k \leq n$ des espaces topologiques et $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ le produit Cartesien. La topologie* **produit** *est la famille $\mathcal{T}$ de parties de X qui sont reunion quelconque d'ensembles de la forme*

$$U_1 \times \cdots \times U_n. \quad U_k \in \mathcal{T}_k.$$

Lemme 2. *$\mathcal{T}$ est une topologie sur X.*

Démonstration. (T1) $\emptyset = \emptyset \times \cdots \times \emptyset$ et $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ donc $\emptyset, X \subset \mathcal{T}_A$.

(T2) Un ouvert est de la forme $\bigcup_{i=(i_1,\cdots,i_n)\in I} U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n}$ où I est une famille de multi-indices quelconque. Or

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i\in I} U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n}\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n}\right) &= \bigcup_{i\in I; j\in J} ((U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n}) \cap (V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n})) \\ &= \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (U_{i_1} \cap V_{j_1}) \times \cdots \times (U_{i_n} \cap V_{j_n}) \end{aligned}$$

et $U_{i_k} \cap V_{j_k}$ sont des ouverts dans X_k.

(T3) Par définition de la topologie produit !

□

Proposition 19. *Soient* (X_k, d_k)*,* $1 \leq k \leq n$ *des espaces métriques et* $X = X_1 \times \cdots \times X_n$*. Soit* $D : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *donné par*

$$D(x, y) = \max_k d_k(x_k, y_k).$$

Alors (X, D) *est un espace métrique et* $\mathcal{T}$ *est la topologie métrique de* D*.*

Remarque 2. $D_p(x, y) = (\sum_k d_k(x_k, y_k)^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$ définit une métrique équivalente à D.

Démonstration. Soit $U \in \mathcal{T}$ et $x \in U$. Il existe donc $U_i \in \mathcal{T}_i$ t.q. $x \in U_1 \times U_2$. Comme $\mathcal{T}_i$ est métrique par rapport à d_i il existe r_i t.q. $B_{d_i}(x_i, r_i) \subset U_i$. Soit $r = \min\{r_1, r_2\}$. Alors $x = (x_1, x_2) \in B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_1}(x_2, r)$. Or $B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_1}(x_2, r) = B_D(x, r)$ ce qui montre que U est ouvert pour D. Ceci montre aussi qu'une boule ouverte pour D est produit des ouverts de X_i et donc appartient à $\mathcal{T}$. ☐

Proposition 20. *Soient* $(X_k, \mathcal{T}_k)$*,* $1 \leq k \leq n$ *des espaces topologiques et* $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ *avec topologie du produit. Alors une suite* $(x^n)_n \subset X$ *converge vers* x *si et seulement si toutes les suites données par les composantes* $(x_k^n)_n \subset X_k$ *convergent vers* x_k*,* $1 \leq k \leq n$*.*

Démonstration. Soit $(x^n)_n$ une suite dans X. On suppose d'abord que la suite converge vers x dans X. Alors dans tout voisinage $V \in \mathcal{V}_x$ se trouve presque tout point de la suite. Soit V_i un voisinage de la composante x_i dans X_i. Alors V_i contient un ouvert U_i qui contient x_i. Comme $U_1 \times \cdots \times U_n$ est un voisinage de x il contient presque tout point de la suite $(x^n)_n$. Donc V_i contient presque tout point de la suite $(x_i^n)_n$. Donc $(x_i^n)_n$ tend vers x_i.

Supposons maintenant que les $(x_i^n)_n$ tend vers x_i. Soit V un voisinage de x. Or comme V contient un ouvert qui contient x il contient même un ouvert de la forme $U_1 \times \cdots \times U_n$, $U_i \in \mathcal{T}_i$, qui contient x. U_i est un voisinage de x_i et donc contient presque tout point de la suite $(x_i^n)_n$. Donc d'abord $U_1 \times \cdots \times U_n$ et en conséquence aussi V contient presque tout point de la suite $(x^n)_n$. Donc $(x^n)_n$ tend vers x. ☐

1.8.3 Espace quotient

Définition 19. *Soit* $\sim$ *une relation d'équivalence sur un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$*. On pose* $\tilde{X} = X/\sim$ *l'ensemble des classes d'équivalance de la relation et note* $[x] \in \tilde{X}$ *la classe de* x*. Soit* $q : X \to \tilde{X}$ *la surjection canonique,* $q(x) = [x]$*. On pose*

$$\mathcal{T}_{\tilde{X}} = \{U \subset \tilde{X} | q^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

et l'appelle la topologie **quotient** *sur* $\tilde{X}$*.*

Lemme 3. $\mathcal{T}_{\tilde{X}}$ *est une topologie sur* $\tilde{X}$*.*

Démonstration. (T1) $\emptyset = q^{-1}(\emptyset)$ et $X = q^{-1}(\tilde{X})$

(T2) Pour n'importe quelle application $\varphi : X \to Y$ et $A, B \subset X$ on a $\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B)$. On applique celui à $\varphi = q$ et A, B deux ouverts de X.

(T3) Avec la même notation comme dessus, si $\{A_i\}_{i\in I}$ est une famille quelconque de parties de X on a $\varphi^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(A_i)$. On applique celui à $\varphi = q$ et A_i des ouverts de X.

□

Exemple 16. $X = \mathbb{R}$, $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Alors $\mathcal{T}_{\tilde{X}} = \{\emptyset, \tilde{X}\}$. En particulier $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas Hausdorff pour la topologie quotient.

1.9 Compléments

Proposition 21. *(***Inégalité de Young***) Si $a, b \geq 0$ et si $1 < p, q < \infty$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.1}$$

Démonstration. On fixe b. La fonction $a \mapsto f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$, $a \geq 0$, atteint son minimum pour $a_0 = b^{1/(p-1)}$ et on vérifie facilement que $f(a_0) = 0$ (on utilise l'égalité $\frac{p}{p-1} = q$). □

Proposition 22. *(***Inégalité de Hölder***) Si $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et si $1 < p, q < \infty$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \|a\|_p \|b\|_q \left(= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}\right). \tag{1.2}$$

Démonstration. Si $a = 0$ ou $b = 0$, l'inégalité suit trivialement. Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Dans ce cas, $\alpha = \|a\|_p > 0$ et $\beta = \|b\|_q > 0$. Soit $A > 0$ à déterminer ultérieurement. Pour chaque i, on a

$$|a_i b_i| = (A|a_i|)\left(\frac{|b_i|}{A}\right) \leq \frac{A^p |a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{A^q q}.$$

En sommant ces inégalités pour $i = 1, \ldots, n$, on trouve, à l'aide de l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{A^p \alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{A^q q}.$$

On choisit maintenant A de sorte que $A^p \alpha^p = \frac{\beta^q}{A^q}$; alors $A = \frac{\beta^{q/(p+q)}}{\alpha^{p/(p+q)}} = \frac{\beta^{1/p}}{\alpha^{1/q}}$ (car $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{q}$ et $\frac{q}{p+q} = \frac{1}{p}$). En remplaçant dans l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \frac{\alpha\beta}{p} + \frac{\alpha\beta}{q} = \alpha\beta = \|a\|_p \|b\|_q.$$

□

Proposition 23. *(***Inégalité de Minkowski***) Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $1 < p < \infty$, alors*

$$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p. \tag{1.3}$$

Démonstration. Si $a+b=0$, c'est immédiat. Supposons $a+b \neq 0$ et posons $\alpha = \|a+b\|_p > 0$. Soit $1 < q < \infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (autrement dit, $q = \frac{p}{p-1}$). On a, de l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{i=1}^n |a_i||a_i+b_i|^{p-1} = \left|\sum_{i=1}^n |a_i||a_i+b_i|^{p-1}\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{(p-1)/p} = \alpha^{p-1}\|a\|_p$$

(car $q(p-1) = p$ et $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$) et, de même, $\sum_{i=1}^n |b_i||a_i+b_i|^{p-1} \leq \alpha^{p-1}\|b\|_p$.
En sommant ces deux inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire, on trouve

$$\alpha^p = \sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p = \sum_{i=1}^n |a_i+b_i||a_i+b_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n (|a_i|+|b_i|)|a_i+b_i|^{p-1} \leq \alpha^{p-1}(\|a\|_p + \|b\|_p)\ ;$$

l'inégalité de Minkowski s'obtient de cette dernière inégalité en simplifiant par α^{p-1}. □

Chapitre 2

Continuité

2.1 Caractérisations de la continuité

Définition 1. *Soient* $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques et* $f : X_1 \to X_2$ *une application. Soit* $a \in X_1$ *et* $b \in X_2$. *On dit que* f *tends vers* b *si* x *tend vers* a, *écrit* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *si pour tout voisinage* V *de* b *il existe un voisinage* U *de* a *t.q.* $f(U) \subset V$.

Proposition 1. *Soient* (X_1, d_1), (X_2, d_2) *deux espaces métriques et* $f : X_1 \to X_2$ *une application. Soit* $a \in X_1$ *et* $b \in X_2$. *Alors* f *tends vers* b *si* x *tend vers* a *si et seulement si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *t.q.* $\forall x \in X_1 : d_1(x, a) < \delta$ *implique* $d_2(f(x), b) < \epsilon$.

On note que l'enoncé « $\forall x \in X_1 : d_1(x, a) < \delta$ implique $d_2(f(x), b) < \epsilon$ » est équivalent à $f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset B_{d_2}(b, \epsilon)$.

Démonstration. Supposons que $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$. Soit $\epsilon > 0$. Alors $B_{d_2}(b, \epsilon)$ est un voisinage de b. Il existe alors un voisinage U de a t.q. $f(U) \subset B_{d_2}(b, \epsilon)$. U contient un ouvert qui contient a et cet ouvert contient une boule ouvert de centre a. Soit $\delta > 0$ son rayon. Alors $f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset f(U) \subset B_{d_2}(b, \epsilon)$.

Supposons maintenant que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset B_{d_2}(b, \epsilon)$. Soit V un voisinage de b. Il existe donc $\epsilon > 0$ t.q. $B_{d_2}(b, \epsilon) \subset V$. Il existe $\delta > 0$ t.q. $f(B_{d_1}(a, \delta)) \subset B_{d_2}(b, \epsilon)$. En particulier $U = B_{d_1}(a, \delta)$ et un voisinage t.q. $f(U) \subset V$. $\square$

Définition 2. *Soient* $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques et* $f : X_1 \to X_2$ *une application. On dit que* f *est* **continue en** $a \in X_1$ *si* f *tends vers* $f(a)$ *si* x *tend vers* a.

On dit que f *est continue sur* A *si* f *est continue en tout point de* A. *On dit que* f *est continue si* f *est continue sur* X.

Théorème 2. *Soient* $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ *deux espaces topologiques et* $f : X_1 \to X_2$ *une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est continue.*

2. *Le pré-image $f^{-1}(U)$ d'un ouvert (de X_2) est ouvert (dans X_1).*
3. *Le pré-image $f^{-1}(F)$ d'un fermé (de X_2) est fermé (dans X_1).*
4. *Pour toute partie $A \subset X_1$ on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Démonstration. ($1 \Rightarrow 4$) : Soit f continue et $a \in \overline{A}$. Soit W un voisinage de $f(a)$. Par continuité de f il existe un voisinage V de a t.q. $f(V) \subset W$. Comme $a \in \overline{A}$ on a $V \cap A \neq \emptyset$. Donc $\emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset W \cap f(A)$. Il en suit que $f(a) \in \overline{f(A)}$.

($4 \Rightarrow 3$) : Supposons (4). Soit $F \subset X_2$ fermé et $E = f^{-1}(F) \in X_1$. On a $f(E) = f(f^{-1}(F)) \subset F$. Donc $\overline{f(E)} \subset \overline{F} = F$. Soit $x \in \overline{E}$. Alors, par (4), $f(x) \in \overline{f(E)}$, donc $f(x) \in F$. Donc $x \in E$ ce qui montre $\overline{E} = E$ et E est fermé.

($3 \Rightarrow 2$) : Supposons (3). Soit $U \subset X_2$ ouvert. $f^{-1}(U^c) = \{x \in X_1 | f(x) \notin U\} = X_1 \backslash f^{-1}(U)$. U^c est fermé donc par (3) aussi $f^{-1}(U^c)$ est fermé donc $f^{-1}(U)$ est ouvert.

($2 \Rightarrow 1$) : Supposons (2). Soit $a \in X_1$. Soit V voisinage de $f(a)$. Il existe un ouvert W t.q. $f(a) \in W \subset V$. D'après (2) $f^{-1}(W)$ est ouvert et $a \in f^{-1}(W)$. Donc $U = f^{-1}(W)$ est un voisinage de a qui satisfait $f(U) \subset W \subset V$. Ceci montre que f est continue en a. □

Corollaire 2. *La composition de deux fonctions continues est continue.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des fonctions continues. Soit $U \subset Z$ un ouvert. Alors $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Par la continuité de g, $g^{-1}(U)$ est ouvert et par la continuité de f, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ est ouvert. □

Exemple 1. Pour $X_1 = \mathbb{R}^n$ et $X_1 = \mathbb{R}^m$ avec topologie usuelle on retrouve la notion de continuité usuelle.

Exemple 2. Soit $X_1 = X_2 = X$ et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur X. L'identié id : $X \to X$, $\mathrm{id}(x) = x$ et continue si et seulement si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, c.-à.-d. $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$.

Exemple 3. Soit $X_1 = A \subset X_2$ et $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_A$, la topologie induite. Alors l'inclusion $\imath : A \to X_2$, $\imath(x) = x$, est continue.

Exemple 4. Soit $X = X_1 \times X_2$ avec topologie produit. Alors $\pi_j : X \to X_j$, $\pi(x_1, x_2) = x_j$ est continue.

Exemple 5. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X_1 et $X_2 = \tilde{X}_1$ avec la topologie quotient. Alors la surjection canonique q est continue.

2.2 Applications linéaires continues

Proposition 2. *Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces normés. Pour une application* **linéaire** f : $(E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) f continue ;
b) f continue en 0 ;
c) il existe un $C > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, $\forall\ x \in E$.

Si, **de plus**, *E est* **de dimension finie**, *alors toute application linéaire $f : (E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$ est continue.*

Démonstration. "a)$\Longrightarrow$b)" Évident. "b)$\Longrightarrow$c)" Il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x - 0\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(0)\|_F < 1$. Si $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\|y\|_E < \delta$, où $y = \dfrac{\delta}{2\|x\|_E}x$. Donc $\|f(x)\|_F = \dfrac{2\|x\|_E}{\delta}\|f(y)\|_F \leq \dfrac{2}{\delta}\|x\|_E$. Cette égalité étant clairement vérifiée si $x = 0$, on retrouve c) avec $C = \dfrac{2}{\delta}$.
"c)$\Longrightarrow$a)" On a $\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq C\|x - y\|_E$; f est C-lipschitzienne, donc continue.
Pour la dernière propriété, on fixe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Si $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n$, on vérifie aisément que $x \to \|x\|_1 = |x_1| + \ldots |x_n|$ est une norme sur E. Il suffit de vérifier la continuité par rapport à cette norme. On a

$$\|f(x)\|_F = \|f(x_1e_1 + \ldots x_ne_n)\|_F \leq |x|_1\|f(e_1)\|_F + \ldots |x_n|\|f(e_n)\|_F \leq C\|x\|_1,$$

où $C = \max\{\|f(e_1)\|_F, \ldots, \|f(e_n)\|_F\}$. $\square$

Corollaire 3. *Si $f : (E, \| \ \|_E) \to (F, \| \ \|_F)$ est linéaire et continue, alors il existe une* **plus petite constante** *$C \geq 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, $\forall\ x \in E$. De plus, on a*

$$C = \sup_{x \in E : x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E : \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E : \|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F.$$

Démonstration. L'ensemble $F = \{K \geq 0 \ ; \|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E,\ \forall\ x \in E\}$ est non vide et minoré par 0. Par conséquent, $C = \inf F \in F$ existe. Il est immédiat que cette constante C est la constante désirée et qu'elle est donnée par la première formule. La deuxiéme et troisième formule suivent de l'observation que $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \frac{\|f(\lambda x)\|_F}{\|\lambda x\|_E}$, pour tout $\lambda \neq 0$. $\square$

Définition 3. *Soient $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces normés. On note*

$$\mathcal{L}(E, F) = \{f : E \to F \ ; f \ \textit{linéaire et continue}\}.$$

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, la constante C de la proposition précédente est notée $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, ou tout simplement $\|f\|$. Dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on écrit E' au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$; E' est le **dual** *de E. Si $f \in E'$, on appelle f une* **forme linéaire continue sur** $\mathbb{R}$.

Proposition 3. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectorielréel et $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.*

2.3 Opérations avec les fonctions continues

Proposition 4. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(E, \| \ \|)$ un espace normé.*
a) Si $f_1, f_2 : (X, d) \to (E, \| \ \|)$ sont continues, alors $f_1 + f_2$ est continue.
b) Si $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ et $g : (X, d) \to (E, \| \ \|)$ sont continues, alors fg est continue.
Cas particulier : si $g : (X, d) \to (E, \| \ \|)$ est continue et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λg est continue.

Démonstration. a) On munit $E \times E$ de la norme $\| \ \|_1$. L'application $G : E \times E \to E$, $G(y,z) = y + z$ est linéaire et continue, car $\|G(y,z)\| \leq \|(y,z)\|_1$. On a $f_1 + f_2 = G \circ F$, où $F = (f_1, f_2) : (X,d) \to E \times E$ est continue ; il s'ensuit que $f_1 + f_2$ est continue.
b) $H : \mathbb{R} \times E \to E$, $H(\lambda, x) = \lambda x$, est continue, comme on vérifie aisément. Comme $fg = H \circ K$, où $K : (X,d) \to \mathbb{R} \times E$, $K = (f,g)$, on trouve que fg est continue. $\square$

2.4 Convergence uniforme

Définition 4. *Soient $f_n : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_2, \mathcal{T}_2)$ des fonctions entre deux espaces topologiques. La suite (f_n)* **converge point par point** *vers une fonction $f : X_1 \to X_2$ si $\forall x \in X$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.*

On dit aussi que $(f_n)_n$ converge simplement vers f. La limite d'une suite de fonctions continues qui est convergent point par point n'est pas forcément continue.

On rappelle que dans le cas où $\mathcal{T}_2$ est la topologie métrique par rapport à une métrique d, la convergence point par point de la suite $(f_n)_n$ vers f veut dire

$$\forall x \in X_1 \forall \epsilon > 0 \exists N_{\epsilon,x} \forall n \geq N_{\epsilon,x} : d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Définition 5. *Soient $f_n, f : (X_1, \mathcal{T}) \to (X_2, d)$ des fonctions entre un espace topologique et un espace metrique. La suite (f_n)* **converge uniformément** *vers f si*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \forall n \geq N_\epsilon \forall x \in X_1 : d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

On écrit alors $f_n \xrightarrow{u} f$.

Théorème 3. *Soient $f_n : (X, \mathcal{T}) \to (Y, d)$ des fonctions continues entre un espace topologique et un espace metrique. Si $f_n \xrightarrow{u} f$, alors f est continue.*

Démonstration. Soient $a \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $f_n \xrightarrow{u} f$ il existe un n_0 tel que $\forall x \in X : d(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon/3$. Par continuité de f_{n_0} il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(V) \subset B_d(f(a), \varepsilon/3)$. Donc $\forall x \in V$: $d(f_{n_0}(x), f(x)) < \varepsilon/3$. En particulier, $\forall x \in V : d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(a)) + d(f_{n_0}(a), f(a)) < \varepsilon$. Ceci montre qu'on a trouvé pour $\varepsilon > 0$ un voisinage V de a t.q. $f(V) \subset B_d(f(a), \epsilon)$. Donc f est continue en a. $\square$

La convergence uniforme entraine la convergence point par point.

2.5 Homéomorphismes

Définition 6. *Une application $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (2, \mathcal{T}_2)$ est un* **homéomorphisme** *si f est continue, bijective et sa réciproque f^{-1} est continue aussi.*

On dit alors que $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ sont **homéomorphes**.

Exemple 6. Soit $X_1 = X_2 = X$ et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur X. L'identité $\mathrm{id} : X \to X$, $\mathrm{id}(x) = x$ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Exemple 7. Une bijection $f : X_1 \to X_2$ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2 : U \mapsto f(U)$ est une bijection.

Le résultat suivant est immédiat

Proposition 5. *La relation "$(X_1, \mathcal{T}_1)$ est homéomorphe avec $(X_2, \mathcal{T}_2)$" est une relation d'équivalence.*

Chapitre 3

Espaces complets

3.1 Suites de Cauchy

Les notions de suite de Cauchy et de complétude dépendent d'une distance et donc s'appliquent aux espaces métriques.

Définition 1. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une suite* $(x_n) \subset X$ *est* **de Cauchy** $\iff \forall\, \varepsilon > 0$, *il existe un* n_0 *tel que* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *dès que* $n, m \geq n_0$.

Il est facile à voir que les suites de Cauchy le restent si on remplace d par une distance équivalente.

Définition 2. *Soit* (X, d) *un espace topologique. Si* $(x_n) \subset X$ *et* $x \in X$, *alors, par définition,* x *est une* **valeur d'adhérence** *de la suite* (x_n) *si elle admet une sous-suite qui converge vers* x.

Exemple 1. *Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle, soit* $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Alors* 1 *est une valeur d'adhérence de* (x_n), *car* $x_{2n} \to 1$.

Proposition 1. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $(x_n)_n$ *une suite dans* X. *Si* $x_n \to x$, *alors* x *est la seule valeur d'adhérence de la suite* (x_n). *En particulier, la limite d'une suite convergente est unique.*

Démonstration. x est une valeur d'adhérence, car la suite extraite (x_n) converge vers x. Soit y une valeur d'adhérence de (x_n). Il existe une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \to y$. Par ailleurs, on a aussi $x_{n_k} \to x$. On suppose par l'absurde $y \neq x$. Alors $d(x, y) > 0$. Posons $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$. Comme $x_{n_k} \to x$, il existe un k_1 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ si $k \geq k_1$; de même, il existe un k_2 tel que $d(x_{n_k}, y) < \varepsilon$ si $k \geq k_2$. Alors, pour $k = \max\{k_1, k_2\}$, on a $d(x, y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < 2\varepsilon = d(x, y)$, ce qui est absurde. $\square$

Proposition 2. *a) Si* (x_n) *converge, alors* (x_n) *est une suite de Cauchy.*
b) Une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence.
c) Une suite de Cauchy converge$\iff$ *elle a une valeur d'adhérence.*
d) On considère une suite de réels strictement positifs, $a_k \to 0$. *Si* (x_n) *est une suite de Cauchy, il existe une suite extraite* (x_{n_k}) *telle que* $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < a_k$, $\forall\, k$.

Démonstration. a) Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $\varepsilon > 0$, il existe un n_0 tel que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$. Si $m, n \geq n_0$, on trouve alors $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon$.
b) Soient $a, b \in X$ tels que, pour deux sous-suites, $(x_{\varphi(n)})$ et $(x_{\psi(n)})$, on ait $x_{\varphi(n)} \to a$ et $x_{\psi(n)} \to b$. On suppose par l'absurde $a \neq b$ et soit $\varepsilon = d(a, b) > 0$. Il existe trois entiers, n_0, n_1, n_2, tels que : $d(x_n, x_m) < \varepsilon/3$ si $n, m \geq n_0$, $d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon/3$ si $n \geq n_1$, $d(x_{\psi(n)}, b) < \varepsilon/3$ si $n \geq n_2$. Par ailleurs, on a $\varphi(n) \to \infty$ et $\psi(n) \to \infty$, et donc il existe un n_3 tel que $n_3 \geq n_1$ et $\varphi(n_3) \geq n_0$, respectivement un n_4 tel que $n_4 \geq n_2$ et $\psi(n_4) \geq n_0$. On obtient la contradiction

$$\varepsilon = d(a, b) \leq d(x_{\varphi(n_3)}, a) + d(x_{\varphi(n_3)}, x_{\psi(n_4)}) + d(x_{\psi(n_4)}, b) < \varepsilon.$$

c) "$\Longrightarrow$" Une suite convergente a une valeur d'adhérence. "$\Longleftarrow$" Si a est une valeur d'adhérence de (x_n), il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $x_{\varphi(n)} \to x$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_1 tel que $d(x_{\varphi(n)}, a) < \varepsilon/2$ si $n \geq n_1$. Avec le n_0 correspondant à $\varepsilon/2$ dans la définition d'une suite de Cauchy, il existe un $n_2 \geq n_1$ tel que $\varphi(n_2) \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, on trouve $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{\varphi(n_2)}) + d(x_{\varphi(n_2)}, a) < \varepsilon$ si $n \geq n_0$.
d) Pour chaque k, il existe un n_k tel que $d(x_n, x_m) < a_k, \forall\, n, m \geq n_k$. Comme cette propriété reste vraie en remplaçant n_k par un nombre supérieur à n_k, on peut supposer $n_0 < n_1 < \ldots$. Donc (x_{n_k}) est une sous-suite et la propriété demandée est vérifiée par construction. $\square$

La réciproque de a) est fausse :

Exemple 2. *Dans $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n) définie par $x_n = E(2^n\sqrt{2})/2^n$ est de Cauchy, mais ne converge pas.*

En effet, on a $(2^n\sqrt{2} - 1)/2^n < x_n \leq \sqrt{2}$, d'où $x_n \to \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy. Par ailleurs, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'unicité de la limite implique que (x_n) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Définition 3. *Si (X, d) est un espace métrique,*
a) une partie A de X est **bornée** *s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que $d(a, x) \leq r$, $\forall\, x \in A$;*
b) une suite $(x_n) \subset X$ est **bornée** *s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que $d(a, x_n) \leq r$, $\forall\, n$.*

Exercice. Si a) ou b) sont vraies pour un $a \in X$ et un r, elles sont vraies pour tout $b \in X$, quitte à changer r.

Proposition 3. *Une suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. On fixe un $a \in X$. Il existe un n_0 tel que $d(x_n, x_m) < 1$ si $n, m \geq n_0$. Si $n \geq n_0$, on trouve $d(a, x_n) \leq d(a, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq d(a, x_{n_0}) + 1$. Finalement, $d(a, x_n) \leq r$, $\forall\, n$, où $r = \max\{d(a, x_0), \ldots, d(a, x_{n_0 - 1}), d(a, x_{n_0}) + 1\}$. $\square$

À nouveau, la réciproque est fausse :

Exemple 3. *Dans $\mathbb{R}$, la suite (x_n), $x_n = (-1)^n$, est bornée, mais pas de Cauchy.*

En effet, $d(0, x_n) \leq 1$, $\forall\, n$. Comme 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de (x_n), cette suite n'est pas de Cauchy.

3.2 Complétude

Définition 4. *Un espace métrique* (X, d) *est* **complet**$\Longleftrightarrow$ *toute suite de Cauchy* $(x_n) \subset X$ *est convergente.*
Un espace normé $(E, \| \ \|)$ *est* **de Banach**$\Longleftrightarrow$ E *est complet pour la distance associée à* $\| \ \|$.

Exemple 4. $\mathbb{Q}$ *muni de la distance usuelle dans* $\mathbb{R}$ *n'est pas complet, car il existe dans* $\mathbb{Q}$ *une suite de Cauchy non convergente.*

Théorème 4. $\mathbb{R}$ *est complet.*

Remarque 1. *On admet qu'il existe un ensemble* $\mathbb{R}$ *satisfaisant les propriétés algébriques usuelles et l'axiome de la borne* sup.

Démonstration. Soient $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots, \}$, $a_n = \inf A_n$, $b_n = \sup A_n$. On a $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, car A_n est borné. Clairement, $a_n \leq b_n$, (a_n) est croissante, (b_n) décroissante. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ si $n, m \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, on a donc $A_n \subset [x_{n_0} - \varepsilon/2, x_{n_0} + \varepsilon/2]$, ce qui implique $x_{n_0} - \varepsilon/2 \leq a_n \leq b_n \leq x_{n_0} + \varepsilon/2$; d'où $b_n - a_n \leq \varepsilon$. Il s'ensuit que les suites (a_n), (b_n) sont adjacentes. Par conséquent, il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to a$, $b_n \to b$. Comme $a_n \leq x_n \leq b_n$, on trouve $x_n \to a$. □

Proposition 4. *Soient* (X_j, d_j), $j = 1, \dots, k$, *des espaces complets. Alors* $X = \prod_{j=1}^{k} X_j$ *muni d'une distance produit est complet.*

Démonstration. On muni X de la distance D_∞. Si (x^n) est une suite de Cauchy dans X, (x_j^n) l'est aussi dans X_j. Si $x_j^n \to x_j$ dans X_j, alors $x^n \to (x_1, \dots, x_k)$ dans X. □

Corollaire 4. $\mathbb{R}^n$ *muni d'une norme produit est complet.*

Définition 5. *Soit* X *un espace topologique et* (Y, D) *un espace métrique. Une fonction* $f : X \to Y$ *est* **bornée** *si son image* $f(X)$ *est bornée.*
$C_b(X, Y) = \{f : X \to Y \ ; f$ **continue** *et* **bornée**$\}$.
Si f, $g \in C_b(X, Y)$, *on pose* $\delta(f, g) = \sup\{D(f(x), g(x)) \ ; x \in X\}$.

Exercice. a) $\delta(f, g) < \infty$.
b) $\delta(f_n, f) \to 0 \Longleftrightarrow f_n \overset{u}{\to} f$.

Proposition 5. *Si* (Y, D) *est* **complet**, *alors* $C_b(X, Y)$ *est complet.*

Démonstration. Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $C_b(X, Y)$, alors, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans Y. On pose $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $\delta(f_n, f_m) < \varepsilon/2$, $n, m \geq n_0$. Pour tout $x \in X$, on a alors $D(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$; ceci s'obtient en faisant $m \to \infty$ dans l'inégalité précédente (on utilise la continuité de $y \mapsto D(a, y)$). On trouve $\delta(f_n, f) < \varepsilon$,

$n \geq n_0$. Il s'ensuit que $\delta(f_n, f) \to 0$, ce qui revient à $f_n \xrightarrow{u} f$. Par conséquent, f est continue. Pour $\varepsilon = 1$, il existe un $a \in Y$ et un $r > 0$ tels que $(D(a, f_{n_0}(x)) \leq r$, $x \in X$. On a alors $D(a, f(x)) \leq D(a, f_{n_0}(x)) + D(f_{n_0}(x), f(x)) \leq r + 1$. Il s'ensuit que $f \in C_b(X, Y)$. □

Proposition 6. *Si X est un espace topologique et $(E, \| \ \|_E)$ est un espace* **de Banach***, alors $C_b(X, E)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $C_b(X, E)$ est un espace vectoriel, les autres propriétés découlant de la proposition précédente. Si $f, g \in C_b(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est continue. Par ailleurs, il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $\|f(x)\|_E \leq r_1$, $\|g(x)\|_F \leq r_2$, $x \in X$. Il s'ensuit que $\|(\lambda f + g)\|_F \leq |\lambda| r_1 + r_2$, $x \in X$. □

Proposition 7. *Si $(E, \| \ \|_E)$ est un espace normé et $(F, \| \ \|_F)$ un espace* **de Banach***, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est une espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n) \subset \mathcal{L}(E, F)$ une suite de Cauchy. Pour tout $x \in E$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon / (\|x\|_E + 1)$ si $n, m \geq n_0$. Pour des tels n, m, on a alors

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_F = \|(f_n - f_m)(x)\|_F \leq \|f_n - f_m\| \|x\|_E < \varepsilon.$$

On pose, pour $x \in E$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$. Alors f est linéaire. En effet,

$$f(\lambda x + y) = \lim_{n \to \infty} f_n(\lambda x + y) = \lim_{n \to \infty} (\lambda f_n(x) + f_n(y)) = \lambda f(x) + f(y), \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ x, y \in E\ ;$$

(on se sert de la continuité des applications $(a, b) \mapsto a + b$ dans $F \times F$ et $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$ dans $\mathbb{R} \times F$).
Il existe un $r > 0$ tel que $\|f_n\| \leq r$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $\|f(x)\|_F = \lim\limits_{n \to \infty} \|f_n(x)\|_F \leq r \|x\|_E$, $x \in E$, d'où f continue.
Enfin, on montre que $f_n \to f$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $\|f_n - f\| < \varepsilon/2$ si $n, m \geq n_0$. En particulier, si $\|x\|_E \leq 1$, alors $\|f_n(x) - f_m(x)\|_F < \varepsilon/2$. Comme dans la preuve de la proposition précédente, on trouve $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$ et $\|x\|_E \leq 1$. Par passage au sup, on obtient $\|f_n - f\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. □

Proposition 8. *$\ell^\infty = \{x = (x_n) \subset \mathbb{R}\ ; (x_n)$ bornée$\}$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ est un espace de Banach.*

Démonstration. On munit $\mathbb{N}$ de la distance discrète d. Si $(a_k) \subset \mathbb{N}$, on a $a_k \to a \iff$ il existe un rang k_0 tel que $a_k = a$ pour $k \geq k_0$. "$\Longleftarrow$" est claire. Pour "$\Longrightarrow$", $\exists\ k_0$ tel que $d(a_k, a) < 1/2$ si $k \geq k_0$; il s'ensuit que $a_k = a$ si $k \geq k_0$. Conséquence : toute application $f : (\mathbb{N}, d) \to (Y, D)$ est continue, quel que soit l'espace métrique (Y, D). On trouve que $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty) = C_b((\mathbb{N}, d), (\mathbb{R}, | \ |))$. □

3.3 Relation entre complétude et fermeture

Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

Proposition 9. *a) Si (A, d) est complet, alors A est un fermé de X.*
b) Si (X, d) est complet et A est un fermé de X, alors (A, d) est complet.

Démonstration. a) Soient $(x_n) \subset A$ et $a \in X$ tels que $x_n \to a$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy, donc convergente (dans A) vers un $b \in A$. L'unicité de la limite (dans X) implique $a = b \in A$. Il s'ensuit que $\overline{A} \subset A$, d'où A fermé.
b) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans A. Alors il existe un $a \in X$ tel que $x_n \to a$. Il s'ensuit que $a \in A$, et donc (x_n) converge dans A. □

Corollaire 5. *Dans un espace métrique complet, A complet $\Longleftrightarrow$ A fermé.*

Proposition 10. *Soit (X, d) un espace métrique. Si toutes les parties* **fermées** *et* **bornées** *de X sont complètes, alors X est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X. Alors (x_n) est bornée, et donc $(x_n) \subset \overline{B}(a, r)$ pour un $a \in X$ et un $r > 0$. $\overline{B}(a, r)$ étant un fermé borné, (x_n) converge dans $\overline{B}(a, r)$, et donc dans X. □

3.4 Théorème du point fixe

Définition 6. *Une application $f : (X, d) \to (Y, D)$ est* **contractante** *s'il existe un $k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

Définition 7. *Si $f : X \to X$, un* **point fixe** *de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.*

Théorème 5. *(***Théorème du point fixe de Picard***) Soient (X, d) un espace métrique* **complet** *et $f : (X, d) \to (X, d)$* **contractante***. Alors :*
a) f a exactement un point fixe a ;
b) pour tout $x_0 \in X$, la suite (x_n), $x_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}(x_0)$, converge vers a ;
c) de plus, si $k < 1$ est tel que f soit k-lipschitzienne, alors on a $d(x_n, a) \leq \dfrac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Démonstration. a) Soit $0 < k < 1$ tel que f soit k-lipschitzienne. f a au plus un point fixe : si, par l'absurde, a et b sont des points fixes et $a \neq b$, on aboutit à la contradiction $0 < d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b) < d(a, b)$.
L'existence de a suit de b) : si la suite (x_n) converge et si a est tel que $x_n \to a$, alors $x_{n+1} = f(x_n) \to f(a)$, d'où $f(a) = a$.
b) On a, pour tout n, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ (par récurrence sur n). Par conséquent, si $m \geq n$, alors

$$(1) \qquad d(x_m, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) = Ck^n.$$

Comme $Ck^n \to 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n_0 tel que $Ck^n < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Il s'ensuit que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ si $m, n \geq n_0$. La suite (x_n) étant de Cauchy, elle converge vers un $a \in X$. De ce qui précède, a est l'unique point fixe de f.
c) Comme $x_m \to a$, la conclusion s'obtient en faisant tendre $m \to \infty$ dans (1). $\square$

Exemple 5. *Trouver le nombre des solutions de l'équation* $\cos x = x$.

On a $\cos x = x \Longrightarrow x \in [-1, 1]$. Soit $f : X = [-1, 1] \to X$, $f(x) = \cos x$. $[-1, 1]$ est complet (avec la distance usuelle), car fermé dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on a $|f'(x)| \leq \sin 1 < 1$, $x \in X$. Le théorème des accroissements finis implique $|f(x) - f(y)| \leq \sin 1 |x - y|$, $x, y \in X$. Il s'ensuit que l'équation $\cos x = x$ a exactement une solution.

Le théorème suivant est une application importante du théorème de point fixe.

Théorème 6. *Soient $U \subset \mathbb{R}^p$ et $V \subset \mathbb{R}^q$ des ouverts et $F : U \times V \to \mathbb{R}^q$ une fonction de classe C^1 (toutes ses derivées partielles existent et sont continues). On pose pour $x \in U$, $F_x : V \to \mathbb{R}^q$, $F_x(y) = F(x, y)$. On suppose qu'il existe $(\xi, \eta) \in U \times V$, t.q. $F(\xi, \eta) = 0$ et la dérivée de F_ξ en η, $F'_\xi(\eta)$, soit inversible. Alors il existe un voisinage $\tilde{U} \subset U$ de ξ, un voisinage $\tilde{V} \subset V$ de η et une fonction continue $f : \tilde{U} \to \tilde{V}$, t.q.*

$$f(\xi) = \eta \quad \text{et} \quad \forall x \in \tilde{U} \; : \; F(x, f(x)) = 0.$$

De plus, si $(x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$ satisfies $F(x, y) = 0$ alors $y = f(x)$.

Démonstration. La dérivée $F'_x(y)$ de F_x en y est une application linéaire (une matrice $q \times q$, la matrice de Jacobi de F_x en y). Posons $J = F'_\xi(\eta)$ et $\Phi_x : V \to \mathbb{R}^q$, $\Phi_x(y) = y - J^{-1} F_x(y)$. Alors Φ_x est de classe C^1 et $(x, y) \mapsto \Phi'_x(y) = \mathrm{id} - J^{-1} F'_x(y)$ continue. De plus, $\Phi'_\xi(\eta) = \mathrm{id} - J^{-1} J = 0$. Il existe donc un voisinage $W \subset U \times V$ de (ξ, η) t.q.

$$\forall (x, y) \in W : \; \|\Phi'_x(y)\| \leq \frac{1}{2} \tag{3.1}$$

(norme en sens des applications linéaires). Comme F est continue et $F(\xi, \eta) = 0$ on trouve pour tout $\epsilon > 0$ un voisinage $U_\epsilon \subset U$ de ξ t.q.

$$\forall x \in U_\epsilon : \; |F(x, \eta)| \leq \frac{\epsilon}{4\|J^{-1}\|}. \tag{3.2}$$

Choisissons ϵ t.q. $U_\epsilon \times B(\eta, \epsilon) \subset W$ ($B(\eta, \epsilon)$ la boule ouverte dans $\mathbb{R}^q$) et posons $\tilde{U} = U_\epsilon$ et $\tilde{V} = B(\eta, \epsilon)$. On pose

$$D := \{g \in C_b(\tilde{U}, \mathbb{R}^q) : g(\xi) = \eta \text{ et } \sup_{x \in \tilde{U}} \|g(x) - \eta\| \leq \frac{\epsilon}{2}\}.$$

$C_b(\tilde{U}, \mathbb{R}^q)$ est un espace de Banach pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, $\|g\|_\infty = \sup_x \|g(x)\|_{\mathbb{R}^q}$. D est l'intersection des deux espaces fermés : de la boule fermée dans $C_b(\tilde{U}, \mathbb{R}^q)$ de centre η et rayon $\frac{\epsilon}{2}$ avec l'espace des fonctions de $C_b(\tilde{U}, \mathbb{R}^q)$ qui s'annulle en ξ. D est donc complet. Le but est de trouver la fonction f comme point fixe d'une application contractante A sur D.

Posons $A : D \to C(\tilde{U}, \mathbb{R}^q)$, $A(g)(x) = g(x) - J^{-1}F(x, g(x))$. En effet, on voit toute de suite que $A(g)$ est continue. De plus $A(g)(\xi) = \eta - J^{-1}F(\xi, \eta) = \eta$. On a $\Phi_x(y) - \Phi_x(z) = \int_0^1 \Phi'_x(y + t(y-z))(y-z)dt$. Donc (3.1) implique

$$\forall y, z \in \tilde{V} : \quad \|\Phi_x(y) - \Phi_x(z)\| \leq \frac{1}{2}\|y - z\|. \tag{3.3}$$

Comme $A(g)(x) = \Phi_x(g(x))$ on obtient $\|A(g_1)(x) - A(g_2)(x)\| \leq \frac{1}{2}\|g_1(x) - g_2(x)\|$ pour tout $g_1, g_2 \in D$. Donc $\|A(g_1) - A(g_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|_\infty$ et A est contractante pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrons que A envoie D dans D. Ceci decoule de

$$\|A(g)(x) - \eta\| \leq \|A(g)(x) - A(\eta)(x)\| + \|A(\eta)(x) - \eta\| \leq \frac{1}{2}\|g(x) - \eta\| + \frac{\epsilon}{4} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

car $A(\eta)(x) - \eta = J^{-1}F(x, \eta)$ et $\|J^{-1}F(x, \eta) \leq \|J^{-1}\|\|F(x, \eta)\| \leq \frac{\epsilon}{4}$ d'après (3.2).

Application du théorème de point fixe nous fournit un unique point fixe f de A qui satisfait $A(f) = f$ donc $F(x, f(x)) = 0$.

Soit maintenant $(x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{V}$ solution de $F(x, y) = 0$. Alors $\Phi_x(y) = y$ et donc, en utilisant (3.3) $\|f(x) - y\| = \|\Phi_x(f(x)) - \Phi_x(y)\| \leq \frac{1}{2}\|f(x) - y\|$ ce qui implique $\|f(x) - y\| = 0$. □

3.5 Séries

Définition 8. *Soient $(E, \| \|)$ un espace normé et $(x_n) \subset E$. La série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est* **convergente**$\Longleftrightarrow$ *la suite $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ est convergente. On pose $\sum_{n\geq 0} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n$.*

Définition 9. *La série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est* **absolument convergente**$\Longleftrightarrow$ $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ *est convergente.*

Traduction : $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ convergente $\Longleftrightarrow$ il existe un $M > 0$ tel que $\sum_{k=0}^n \|x_k\| \leq M$ pour tout n.

Proposition 11. *Dans un* **espace de Banach**, *une série* **absolument convergente** *est convergente.*

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \|x_k\|$. Il existe un n_0 tel que $|T_m - T_n| < \varepsilon$ si $m, n \geq n_0$. Si $m \geq n \geq n_0$, on a $\|S_m - S_n\| \leq T_m - T_n < \varepsilon$; la suite (S_n) est de Cauchy, donc convergente. □

Exemple 6. Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|T\| < 1$, alors $\mathrm{Id} - T$ et bijectif et son inverse est linéaire et continu.

Posons $x_n = T^n$, $n \geq 0$. On remarque que, si $T, S \in \mathcal{L}(E)$, alors $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$. En effet,

$$\|TS\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|TSx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T\|\|Sx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T\|\|S\|\|x\|}{\|x\|} = \|T\|\|S\|.$$

Il s'ensuit que $\|x_n\| \leq \|T\|^n$, et donc la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} x_n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, car absolument convergente.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$, $S = \displaystyle\sum_{n \geq 0} x_n \in \mathcal{L}(E)$. On a $(\mathrm{Id} - T)S_n = \mathrm{Id} - T^{n+1}$, d'où $(\mathrm{Id} - T)S = \mathrm{Id}$, par passage à la limite. De même, $S(\mathrm{Id} - T) = \mathrm{Id}$. Donc S est l'inverse de $\mathrm{Id} - T$.

Chapitre 4

Compacité

4.1 Notion de compacité

Définition 1. *Soit $\mathcal{U}$ une famille de parties d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. On dit que $\mathcal{U}$ est un* **recouvrement ouvert** *de X si $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, c.-à.-d. les membres de $\mathcal{U}$ sont ouverts, et $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.*

On dit que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ est un **sous-recouvrement fini** *si $\mathcal{V}$ est fini (contient un nombre fini de membres) et $X = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$.*

Définition 2. *Un espace topologique X est compact si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.*

Exemple 1. Soit X avec topologie discrète, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Alors X est compact ssi X est fini.

Par passage au complémentaire, on trouve

Corollaire 6. *Soit (X, d) un espace compact.*
a) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, alors il existe une famille **finie** *$J \subset I$ telle que $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$.*
b) Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$ pour toute famille **finie** *$J \subset I$, alors $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.*

Théorème 7. *Soient X et Y deux espaces compacts. Alors leur produit Cartesien $X \times Y$ est compact pour la topologie produit.*

4.2 Compacité pour les espaces métriques

Définition 3. *Un espace* $(X, \mathcal{T})$ *topologique est* **séquentiellement compact** *si toute suite* $(x_n) \subset X$ *admet une sous-suite convergente. Autrement dit, toute suite* $(x_n) \subset X$ *a au moins une valeur d'adhérence.*

Dans cette section on montrera que pour un espace métrique être séquentiellement compact est équivalent à être compact. On remarque que la propriété d'un espace d'être séquentiellement compact ne change pas si on remplace la distance par une distance équivalente.

Théorème 8. (**Lebesgue**) *Soit* (X, d) *séquentiellement compact. On suppose que* $(U_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement ouvert de* X*). Alors il existe un* $r > 0$ *tel que, pour tout* $x \in X$*,* $B(x, r)$ *soit contenue dans* U_i *pour un certain* i *(dépendant de* x*, en principe).*

(r est **la constante de Lebesgue** du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$.)

Démonstration. Par l'absurde : pour tout $r > 0$, il existe un $x \in X$ tel que $B(x, r)$ ne soit contenue dans aucun U_i. Pour $r = 1/(n+1)$, on trouve un x_n tel que $B(x_n, 1/(n+1))$ ne soit contenue dans aucun U_i. On considère une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un $x \in X$. Il existe un i tel que $x \in U_i$, et donc un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_i$. Il existe un k_0 tel que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ si $k \geq k_0$. Il existe un k_1 tel que $1/(n_k + 1) < \varepsilon/2$ si $k \geq k_1$. Si $k = \max\{k_0, k_1\}$, alors $z \in B(x_{n_k}, 1/(n_k + 1) \Longrightarrow d(z, x) \leq d(z, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, et donc $B(x_{n_k}, 1/(n_k + 1)) \subset B(x, \varepsilon) \subset U_i$, contradiction. □

Proposition 1. *Soient* (X, d) *séquentiellement compact et* $r > 0$*. Alors il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *tels que* $X = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r)$*.*

Démonstration. Par l'absurde : sinon, pour tout $x_1 \in X$ on a $B(x_1, r) \neq X$. Soit $x_2 \notin B(x_1, r)$. Alors $B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \neq X$. Soit $x_3 \notin B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \neq X$, etc. Par récurrence, on trouve une suite (x_n) telle que $x_n \notin \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n-1} B(x_j, r)$. Il s'ensuit que $d(x_n, x_m) \geq r$, $\forall\ m, n$. Une telle suite ne peut pas avoir de sous-suite convergente (contradiction qui finit la preuve). En effet, si, par l'absurde, $x_{n_k} \to x$, alors $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \geq r$ si $k \neq l$. En faisant d'abord $l \to \infty$, ensuite $k \to \infty$, on trouve $d(x, x) \geq r$, contradiction. □

Proposition 2. *Soit* (x_n) *une suite sans valeur d'adhérence de* (X, d)*. Alors, pour tout* $x \in X$*, il existe un* $r > 0$ *tel que* $B(x, r)$ *ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite.*

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 19 du Chapitre 1, mais on présente une preuve directe. Par l'absurde : il existe $x \in X$ tel que, pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ contienne une infinité de termes de la suite. On prend $r = 1$. Alors $B(x, 1)$ contient une infinité de termes de la suite ; en particulier, on trouve un n_0 tel que $d(x_{n_0}, x) < 1$. Par récurrence, en prenant $r = 1/(k + 1)$, on trouve un $n_k > n_{k-1}$ tel que $d(x_{n_k}, x) < 1/(k + 1)$. Il s'ensuit que (x_{n_k}) est une sous-suite de la suite initiale et que $x_{n_k} \to x$, contradiction. □

Théorème 9. *(***Borel-Lebesgue***) Un espace métrique est séquentiellement compact si et seulement s'il est compact.*

Démonstration. "$\Longrightarrow$" Soit r la constante de Lebesgue d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r)$. Pour $j = 1, \ldots, n$, il existe un $i_j \in I$ tel que $B(x_j, r) \subset U_{i_j}$. Alors $X = \bigcup_{k\in J} U_k$, où $J = \{i_j \ ; \ j = 1, \ldots, n\}$.
"$\Longleftarrow$" Par contraposée : si (X, d) n'est pas compact, il existe une suite $(x_n) \subset X$ sans valeur d'adhérence. Pour tout $x \in X$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contienne qu'un nombre fini de termes de la suite. Clairement, $(B(x, r_x))_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Si on considère une famille finie $J \subset X$, alors l'union de la famille $(B(x, r_x))_{x\in J}$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite. En particulier, cette famille ne couvre ni la suite (x_n), ni X. □

Proposition 3. *Un espace métrique* **compact** *est* **complet**.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors toute suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence ; elle est donc convergente ; par conséquent, (X, d) est complet. □

Proposition 4. *Soient (X, d) un espace métrique* **compact** *et $A \subset X$. Alors A compact $\Longleftrightarrow$ A fermé dans X.*

Démonstration. Si A est compact, alors A est complet, donc fermé dans X. Réciproquement, si (x_n) est une suite de A, alors (x_n) a une valeur d'adhérence dans X ; A étant fermé, cette valeur d'adhérence appartient à A, et donc (x_n) a une valeur d'adhérence dans A. □

4.3 Fonctions continues sur un compact

Proposition 5. *Soit $f : X \to Y$ une fonction continue entre espaces topologiques. Si $A \subset X$ est un compact, alors $f(A)$ est un compact.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$. Comme f est continue, $\mathcal{V} := \{f^{-1}(U)|U \in \mathcal{U}\}$ est un recouvrement ouvert de A. Comme A est compact, $\mathcal{V}$ admet un sous-recouvrement fini $\mathcal{V}'$. $\{f(V)|V \in \mathcal{V}'\}$ est un sous-recouvrement fini $\mathcal{U}$. □

Proposition 6. *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un espace topologique X* **compact**. *Alors* $\sup f$ *et* $\inf f$ *sont finis et il existe $a, b \in X$ tels que $f(a) = \inf f$ et $f(b) = \sup f$.*

(Une fonction continue réelle sur un compact est bornée et ses bornes sont atteintes.)

Démonstration. $A := f(X)$ est un compact dans $\mathbb{R}$. On considère le sup ; le raisonnement est similaire pour l'inf. $M = \sup A$ est fini, car sinon, il existe une suite croissante dans A qui diverge et une telle suite n'admet pas de sous-suite convergente. Il existe alors une suite $(t_n) \subset A$ telle que $t_n \to M$. Chaque sous-suite (t_{n_k}) convergente converge aussi vers M. Donc $M \in A$ par compacité de A. Donc $\sup f = M = f(b)$ pour un $b \in X$. □

Proposition 7. *Tout espace métrique* **compact** *est* **borné**.

Démonstration. Soit (X, d) compact. On fixe un $a \in X$ et on considère la fonction continue $f : (X, d) \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, a)$. Alors f est bornée ; en particulier, il existe un $r > 0$ tel que $f(x) \le r$, $x \in X$, ou encore $X = \overline{B}(a, r)$. □

Proposition 8. *Soit $f : X \to Y$ une application continue et* **bijective** *entre deux espaces topologiques, X étant un* **compact**. *Alors f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la continuité de f^{-1}. Soit F un fermé de X ; F est donc compact. Alors $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est un compact de Y, donc un fermé de Y. □

Définition 4. *$f : (X, d) \to (Y, D)$ est* **uniformément continue**$\Longleftrightarrow$ *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $D(f(x), f(y)) < \varepsilon$ dès que $d(x, y) < \delta$.*

Autrement dit, on peut prendre, dans la définition de la continuité, un δ indépendant de a. Il est immédiat qu'une fonction uniformément continue est continue.

Théorème 10. *(***Heine***) Soit $f \in C((X, d), (Y, D))$, avec (X, d)* **compact**. *Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pout tout $a \in X$, il existe un $\delta_a > 0$ tel que $D(f(x), f(a)) < \varepsilon/2$ si $d(x, a) < \varepsilon$. Clairement, $(B(a, \delta_a))_{a \in X}$ est un recouvrement ouvert de X. Soit δ la constante de Lebesgue de ce recouvrement. Si $x, y \in X$ et $d(x, y) < \delta$, alors $x, y \in B(x, \delta) \subset B(a, \delta_a)$ pour un $a \in X$, d'où $D(f(x), f(y)) \le d(f(x), f(a)) + d(f(a), f(y)) < \varepsilon$. □

4.4 Exemples d'espaces compacts

Théorème 11. *(***Bolzano-Weierstrass***) Un intervalle* **fermé** *et* **borné** *de $\mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration. Soit $I = [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On définit une suite d'intervalles de la manière suivante : on pose $I_0 = I$. Si I_k a été construit tel qu'il contienne une infinité de termes de la suite, on divise I_k en deux intervalles fermés de longueur égale à la moitié de la longueur de I_k, J et K. I_{k+1} est alors un de ces deux intervalles ; on lui demande de contenir une infinité de termes de la suite. On note que c'est toujours possible de construire I_{k+1}, car au moins l'un des J ou K contient une infinité de termes de la suite. On construit ensuite, par récurrence, une sous-suite (x_{n_k}) telle que $x_{n_k} \in I_k$, $k \in \mathbb{N}$. On choisit $x_{n_0} = x_0 \in I_0$. En supposant $x_{n_0} < x_{n_1} < \ldots < x_{n_{k-1}}$ construits, on note que, par construction, I_k contient des termes x_n avec $n > n_{k-1}$. On choisit alors un $n_k > n_{k-1}$ tel que $x_{n_k} \in I_k$. La suite (x_{n_k}) est de Cauchy. En effet, si $l \ge k$, alors $x_{n_l}, x_{n_k} \in I_k$ (car $I_l \subset I_k$) et donc $|x_{n_l} - x_{n_k}| \le (b - a)/2^k$. Comme $(b - a)/2^k \to 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un k_0 tel que $(b - a)/2^k < \varepsilon$ si $k \ge k_0$; il s'ensuit que $|x_{n_l} - x_{n_k}| < \varepsilon$ si $k, l \ge k_0$.
$[a, b]$ étant complet (car fermé dans $\mathbb{R}$), on trouve que (x_{n_k}) converge dans $[a, b]$, et donc (x_n) a une valeur d'adhérence. □

Proposition 9. *Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme produit, les* **compacts** *sont précisément les ensembles* **fermés** *et* **bornés**.

Démonstration. Un compact est toujours borné et complet, et donc borné et fermé dans $\mathbb{R}^n$.
Réciproquement, si K est borné, il existe un $r > 0$ tel que $\|x\|_\infty \leq r$, $x \in K$. Alors $K \subset L = [-r, r]^n$, qui est compact comme produit de compacts. K étant fermé dans $\mathbb{R}^n$, il est fermé dans L, donc compact. $\square$

Théorème 12. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de montrer que toutes les normes sont équivalentes à $\| \ \|_1$. Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et soit $f : (\mathbb{R}^n, \| \ \|_1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$. Alors $|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j| \|e_j\| \leq C\|x - y\|_1$, où $C = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Il s'ensuit que f est C-lipschitzienne, donc continue. Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|_1 = 1\}$. Alors K est fermé dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ (car $x \mapsto \|x\|_1$ est 1-lipschitzienne, donc continue, pour la norme $\| \ \|_1$) et borné. Il s'ensuit que cet ensemble est compact dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$. Comme $f(x) \neq 0$, $x \in K$, on trouve que $m = \min_{x \in K} f(x) > 0$ (et $M = \max_{x \in K} f(x) > 0$). Si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $x = \frac{1}{\|y\|_1} y \in K$ et $y = \|y\|_1 x$. On trouve $m\|y\|_1 \leq \|y\| = \|y\|_1 f(x) \leq M\|y\|_1$, ou encore $m\|y\|_1 \leq \|y\| \leq M\|y\|_1$. Cette inégalité étant clairement vraie si $y = 0$, on obtient l'équivalence des normes. $\square$

On peut enfin prouver le

Théorème 1. *Dans un espace vectoriel de* **dimension finie**, *toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base fixée de l'espace de dimension finie E. Soit $T : \mathbb{R}^n \to E$, $T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, qui est clairement linéaire et bijective. Soient $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ deux normes sur E. On définit $|||x|||_j = \|Tx\|_j$, $j = 1, 2$. Il est immédiat que $||| \ |||_j$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. Il existe alors $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\|e\|_1 = C_1|||T^{-1}e|||_1 \leq \|e\|_2 = |||T^{-1}e|||_2 \leq C_2\|e\|_1 = C_2|||T^{-1}e|||_1, \quad \forall \ e \in E.$$

$\square$

Théorème 10. *Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé* **de dimension finie**. *Alors :*
a) E est complet.
b) $A \subset E$ est **complet** $\Longleftrightarrow$ *A est* **fermé**.
c) $A \subset E$ est **compact** $\Longleftrightarrow$ *A est* **fermé et borné**.

Démonstration. Soit T l'application définie ci-dessus. Il suffit de considérer sur E la norme $\|e\| = \|T^{-1}e\|_\infty$.
a) Si (e^n) est une suite de Cauchy dans E, il est clair que $(T^{-1}e^n)$ est un suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, qui est complet. Si $T^{-1}e^n \to x$, alors clairement $e^n \to Tx$.
b) "$\Longrightarrow$" Un sous-espace complet est toujours fermé. "$\Longleftarrow$" Soit (e^n) une suite de Cauchy de A. Alors $(T^{-1}e^n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ (pourquoi ?). Si x est la limite de cette deuxième suite, alors

$e^n \to Tx$ dans E (pourquoi ?). A étant fermé, on trouve que $Tx \in A$; par conséquent, tout suite de Cauchy de A converge dans A.
c) "$\Longrightarrow$" est vraie dans tout espace métrique. "$\Longleftarrow$" Clairement, si A est fermé et borné, $T^{-1}(A)$ l'est aussi (pourquoi ?). Donc $T^{-1}(A)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que $A = T(T^{-1}(A))$ est un compact de E (car image d'un compact par une fonction continue). □

4.5 Compléments

Ce dernier résultat est **faux dans tout espace de dimension infinie** :

Théorème 11. *(***Riesz***) Soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace normé* **de dimension infinie***. Alors* $\overline{B}(0,1)$ *est un ensemble* **fermé***,* **borné***, mais* **non compact***.*

Dans la preuve du théorème, on se servira du résultat suivant :

Lemme 1. *Soit A un ensemble* **fermé** *contenu dans un espace normé de* **dimension finie** $(G, \| \ \|)$*. Alors, pour tout $x \in G$, il existe un $a \in A$ tel que $\|x - a\| = d(x, A)$.*

Autrement dit, l'inf dans la définition de la distance d'un point à un ensemble est atteint.

Démonstration. Il existe une suite $(a_n) \subset A$ telle que $\|x - a_n\| \to d(x, A)$. La suite $(\|x - a_n\|)$ est donc bornée dans $\mathbb{R}$: il existe un $M > 0$ tel que $\|x - a_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\|a_n\| \leq \|x - a_n\| + \|x\| \leq M + \|x\| \equiv R$. La suite (a_n) appartient donc à l'ensemble $K = A \cap \overline{B}(0, R)$, qui est fermé et borné, donc compact. Il existe donc une sous-suite (a_{n_k}) qui converge vers un $a \in K$ (d'où $a \in A$). Finalement, on trouve $\|x - a\| = \lim_{k \to \infty} \|x - a_{n_k}\| = d(x, A)$. □

Revenons au théorème.

Démonstration. Il existe, dans E, un vecteur non nul f_0 (sinon $E = \{0\}$, qui est de dimension finie). Soit $e_0 = f_0/\|f_0\|$, qui vérifie $\|e_0\| = 1$. Nous allons construire par récurrence une suite (e_n) telle que $\|e_n\| = 1$ et $\|e_n - e_m\| \geq 1$ si $m \neq n$; clairement, une telle suite ne peut avoir de sous-suite convergente, ce qui finit la preuve. Supposant $e_0, \ldots, e_{n-1}$ déjà construits, soit $F = \text{Vect}(\{e_0, \ldots, e_{n-1}\})$. On a $F \neq E$, sinon E serait de dimension finie. Soit $f_n \in E \setminus F$. F étant fermé dans E (car complet), on a $d(f_n, F) > 0$. Le lemme précédent (avec $A = F$ et $G = \text{Vect}(F \cup \{f_n\})$ implique l'existence d'un $g_n \in F$ tel que $\|f_n - g_n\| = d(f_n, F)$. On pose $e_n = (f_n - g_n)/\|f_n - g_n\|$, de sorte que, clairement, $\|e_n\| = 1$. Il reste à montrer que $\|e_n - e_j\| \geq 1$, $j = 0, \ldots, n-1$. Si, pour un tel j, on pose $h = g_n + d(x, F)e_j \in F$, on a $\|e_n - e_j\| = \|f_n - h\|/d(f_n, F) \geq 1$, par définition de la distance à un ensemble. □

Chapitre 5

Connexité

5.1 Notion de connexité

Définition 1. *Un espace topologique* $(X, \mathcal{T})$ *est* **connexe** *si les seules parties à la fois ouvertes et fermées de* X *sont* $\emptyset$ *et* X.

Une partie $A \subset X$ *est connexe si* $(A, \mathcal{T}_A)$ *est connexe où* $\mathcal{T}_A$ *est la topologie induite sur* A.

Proposition 1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) $(X, \mathcal{T})$ *est connexe ;*
b) Si $X = F_1 \cup F_2$*, avec* F_1*,* F_2 *fermés disjoints, alors* $F_1 = \emptyset$ *ou* $F_2 = \emptyset$ *;*
c) Si $X = U_1 \cup U_2$*, avec* U_1*,* U_2 *ouverts disjoints, alors* $U_1 = \emptyset$ *ou* $U_2 = \emptyset$ *;*
d) Si $f \in C((X, d), \{0, 1\})$*, alors* f *est constante.*

Ici, $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discréte.

Démonstration. a)$\Longrightarrow$b) On a $F_1 = (F_2)^c$; par conséquent, F_1 est à la fois ouvert et fermé. On a donc $F_1 = \emptyset$ ou $F_1 = X$ (et alors $F_2 = \emptyset$).
b)$\Longrightarrow$c) On a $X = (U_1)^c \cup (U_2)^c$, d'où $(U_1)^c = \emptyset$ ou $(U_2)^c = \emptyset$, ce qui revient à $U_2 = \emptyset$, respectivement $U_1 = \emptyset$.
c)$\Longrightarrow$d) $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts de $\{0, 1\}$, et donc $U_1 = f^{-1}(\{0\})$ et $U_2 = f^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts de X. Clairement, ces deux ouverts sont disjoints et $X = U_1 \cup U_2$. Il s'ensuit que $U_1 = \emptyset$ (et alors $f \equiv 1$) ou $U_2 = \emptyset$ (et alors $f \equiv 0$).
d)$\Longrightarrow$a) Si A est une partie à la fois ouverte et fermée de X, soit $f = \mathbf{1}_A$. Alors $f \in C(X, \{0, 1\})$, car les ouverts de $\{0, 1\}$ sont $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$, et on vérifie aisément que les images réciproques de ces ensembles sont des ouverts de X. On a donc $f \equiv 0$ ou $f \equiv 1$ (et alors $A = \emptyset$ ou $A = X$). $\square$

Proposition 2. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset X$*. Si* A *est connexe et* $A \subset B \subset \overline{A}$*, alors* B *est connexe.*

Démonstration. Soit $F : B \to \{0,1\}$ continue. Alors sa restriction $f\,|_A : A \to \{0,1\}$ est continue et donc constant par la connexité de A. Soit $b = f(x)$ pour $x \in A$. Comme f est continue, $f^{-1}(\{b\})$ est un fermé pour la topologie $\mathcal{T}_B$. il existe donc une fermé F dans X t.q. $f^{-1}(\{b\}) = B \cap F$. On a $A = f\,|_A{}^{-1}(\{b\}) \subset f^{-1}(\{b\}) \subset F$. Donc $B \subset \overline{A} \subset \overline{F} = F$. Donc $f^{-1}(\{b\}) = B \cap F = B$ ce qui implique que f est constant sur B. Donc B est connexe. □

Proposition 3. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose que :*
(i) chaque A_i est connexe ;
(ii) il existe un $i_0 \in I$ tel que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, $\forall\ i \in I$.
Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. Soit $f \in C(\bigcup_{i\in I} A_i; \{0,1\})$. Alors, pour chaque i, $f_{|A_i}$ est constante ; soit c_i la valeur de cette constante. Si $x \in A_i \cap A_{i_0}$, on trouve $c_i = f(x) = c_{i_0}$, d'où f est constante. □

Corollaire 7. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de X telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Corollaire 8. *Soient A, B deux parties connexes de X telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Alors $A \cup B$ est connexe.*

Un résultat plus fort que le corollaire précédent est :

Proposition 4. *Soient A, B deux parties connexes de X telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Alors $A \cup B$ est connexe.*

Démonstration. On pose $C = A \cup (\overline{A} \cap B)$. Donc $A \subset C \subset \overline{A}$ et alors C est connexe et $C \cap B \neq \emptyset$. D'après le corrolaire $C \cup B$ est connexe. Mais $C \cup B = A \cup B \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$. □

Définition 2. *Soit $x \in X$, point d'un espace topologique. La* **composante connexe de** *x est $\mathcal{C}_x = \cup\{A\,;A$ connexe, A contient $x\}$.*
Une partie A de X est une **composante connexe** *s'il existe un x tel que $A = \mathcal{C}_x$.*

Proposition 5. *a) $\mathcal{C}_x$ est la plus grande partie connexe de X contenant x (en particulier, $x \in \mathcal{C}_x$) ;*
b) deux composantes connexes sont soit égales, soit disjointes ; l'union des composantes connexes est X (autrement dit, les composantes connexes forment une partition de X) ;
c) chaque composante connexe est fermée dans X ;
d) Si les composantes connexes sont **en nombre fini**, *alors chaque composante connexe est ouverte dans X.*

Démonstration. a) On doit montrer que : *(i)* $\mathcal{C}_x$ est connexe, *(ii)* $x \in \mathcal{C}_x$, *(iii)* si A est connexe et $x \in A$, alors $A \subset \mathcal{C}_x$. La dernière propriété est claire grâce à la définition de $\mathcal{C}_x$. Pour les deux premières, notons que $\{x\}$ est connexe (pourquoi ?) ; en particulier, $x \in \mathcal{C}_x$. On peut écrire $\mathcal{C}_x = \cup\{A\ ;\ A$ connexe et

$A \cap \{x\} \neq \emptyset\}$, ce qui montre que $\mathcal{C}_x$ est connexe.
b) Si $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y \neq \emptyset$, alors $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y$ est connexe et contient x. On trouve $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x$, d'où $\mathcal{C}_y \subset \mathcal{C}_x$; de même, on a $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{C}_y$, d'où $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}_x$. Par ailleurs, on a $X = \bigcup_{x\in X} \{x\} \subset \bigcup_{x\in X} \mathcal{C}_x \subset X$, d'où $\bigcup_{x\in X} \mathcal{C}_x = X$.
c) $\mathcal{C}_x$ étant connexe, $\overline{\mathcal{C}_x}$ (qui contient x) l'est aussi. Il s'ensuit que $\overline{\mathcal{C}_x} \subset \mathcal{C}_x$, d'où $\overline{\mathcal{C}_x} = \mathcal{C}_x$. On trouve que $\mathcal{C}_x$ est un fermé.
d) On a $X \setminus \mathcal{C}_x = \cup\{\mathcal{C}_y \ ; \ \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset\}$. C'est une union finie de fermés, donc un fermé. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_x$ est un ouvert. □

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 6. *La relation $x \sim y \iff x$ et y appartiennent à la même composante connexe est une relation d'équivalence.*

Proposition 7. *Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une fonction continue. Si X est* **connexe**, *alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit $g \in C(f(X), \{0,1\})$. Alors $g \circ f \in C(X, \{0,1\})$. Il s'ensuit que $g \circ f$ est constante ; par exemple, $g \circ f \equiv 0$. Si $y \in f(X)$, il existe un $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On trouve $g(y) = g(f(x)) = 0$, et donc g est constante. □

Proposition 8. *Soient $X_1, \ldots, X_k$, k espaces connexes. Alors $X = \prod_{j=1}^{k} X_j$ est connexe.*

Démonstration. Il suffit de prouver le résultat si $k = 2$; le cas général s'obtient immédiatement par récurrence sur k. On fixe $x_1 \in X_1$. Soient $A = \{x_1\} \times X_2$, $A_y = X_1 \times \{y\}$, $y \in X_2$. Alors $X_1 \times X_2 = A \cup \bigcup_{y\in X_2} A_y$. Par ailleurs, on a $A_y \cap A \neq \emptyset$, $\forall\, y \in X_2$. Il suffit de montrer que A et A_y sont connexes. On prouve que A est connexe ; l'argument est le même pour A_y. Soit $f : X_2 \to X$, $f(x_2) = (x_1, x_2)$. Alors f est continue, car ses coordonnées sont continues. X_2 étant connexe, $A = f(X_2)$ l'est aussi. □

5.2 Exemples d'espaces connexes

Théorème 12. *a) Une partie A de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si A est un intervalle.*
b) Si $A \subset \mathbb{R}$ et $x \in A$, alors la composante connexe de x dans A est le plus grand intervalle contenant x et contenu dans A.
c) Tout ouvert U de $\mathbb{R}$ est une union **au plus dénombrable** *d'intervalles ouverts* **disjoints**.

La partie c) est une **caractérisation** des ouverts de $\mathbb{R}$, car, réciproquement, toute union d'intervalles ouverts est un ouvert.

Démonstration. a) Si A n'est pas un intervalle, alors il existe $x < y < z$ tels que $x, z \in A$, mais $z \notin A$. Alors $U = A \cap]-\infty, z[$, $V = A \cap]z, +\infty[$ sont des ouverts non vides et disjoints de A tels que $A = U \cup V$, et donc A n'est pas connexe. Réciproquement, supposons A intervalle et soit $f \in C(A, \{0, 1\})$. Si, par l'absurde, f n'est pas constante, alors il existe $x, y \in A$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. De par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un z compris entre x et y (donc appartenant à A) tel que $f(z) = 1/2$, contradiction.
b) Posons $J = \cup\{I \text{ intervalle } \subset A \ ; \ x \in I\}$. J est un intervalle, car une union d'intervalles dont l'intersection est non vide (ce qui est le cas ici, car x est dans chaque intervalle) est un intervalle. Par définition de J, c'est le plus grand intervalle de A contenant x. De a), J est connexe et donc $J \subset \mathcal{C}_x$. Par ailleurs, $\mathcal{C}_x$ est un intervalle contenant x, d'où $\mathcal{C}_x \subset J$. Finalement, $\mathcal{C}_x = J$.
c) On commence par montrer qu'une composante connexe est un intervalle **ouvert**. Soient J une composante connexe de U et $x \in J$. Comme $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset U$. Alors J et $]x - r, x + r[$ sont des parties connexes de U d'intersection non vide. On trouve que $J \cup]x - r, x + r[$ est une partie connexe de U contenant x, et donc $J \cup]x - r, x + r[\subset \mathcal{C}_x = J$. Finalement, $]x - r, x + r[\subset J$, et donc J est un ouvert.
On a $U = \bigcup_{i \in I} J_i$, avec chaque J_i composante connexe (donc intervalle ouvert) ; on suppose qu'il n'y a pas de répétition dans cette liste, ce qui implique $J_i \cap J_k = \emptyset$ si $i \neq k$. Chaque J_i contient un nombre rationnel q_i. L'application $g : I \to \mathbb{Q}$, $g(i) = q_i$, est injective (car les intervalles sont disjoints). On trouve que I est au plus dénombrable. □

Exemple 1. *Si $X = \mathbb{Q}$, alors $\mathcal{C}_x = \{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$.*

En effet, $\mathbb{Q}$ ne contient pas d'intervalle non trivial, car entre deux rationnels il existe toujours un irrationnel.

Définition 3. *Soit E un espace vectoriel. Si $x, y \in E$, le* **segment** *$[x, y]$ est défini par $[x, y] = \{(1-t)x + ty \ ; t \in [0, 1]\}$.*
Une partie C de E est **convexe** *si $[x, y] \subset C$ pour tout $x, y \in C$.*
Une partie A de E est **étoilée** *(par rapport à un point x_0) s'il existe un $x_0 \in A$ tel que $[x_0, x] \subset A$, $\forall \ x \in A$.*

Proposition 9. *Pour une partie A d'un espace normé $(E, \| \ \|)$, on a A convexe $\Longrightarrow$ A étoilée $\Longrightarrow$ A connexe.*

Démonstration. La première implication est claire (on peut choisir n'importe quel $x_0 \in A$). Pour la seconde, on note que $x \in [x_0, x]$, $x \in A$, d'où $A \subset \bigcup_{x \in A} [x_0, x] \subset A$, ou encore $A = \bigcup_{x \in A} [x_0, x]$.
On montre d'abord qu'un segment est connexe. En effet, $[x, y] = f([0, 1])$, où $f : [0, 1] \to E$, $f(t) = (1 - t)x + ty$. On a $\|f(t) - f(s)\| = |s - t|\|x - y\|$, $\forall \ s, t \in [0, 1]$; ainsi, f est lipschitzienne, donc continue. On trouve que $[x, y]$ est connexe. Finalement, A est une union d'ensembles connexes dont l'intersection est non vide (elle contient x_0), donc A est connexe. □

Corollaire 9. *Un espace normé est connexe.*

Exemple 2. *Soit B une boule dans un espace normé. Alors B est convexe, donc connexe.*

On suppose, par exemple, que $B = B(x, r)$; l'argument est le même pour une boule fermée. Si $y, z \in B$ et $t \in [0, 1]$, alors $\|((1-t)y + tz) - x\| = \|(1-t)(y-x) + t(z-x)\| \leq (1-t)\|y-x\| + t\|z-x\| < r$, ou encore $(1-t)y + tz \in B$.

Exemple 3. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *est connexe.*

En effet, $A = B \cup C$, où $B = \{(x, y) \in A \ ; \ y \geq 0\}$, $C = \{(x, y) \in A \ ; \ y \leq 0\}$. Clairement, $B \cap C \neq \emptyset$, B est étoilé par rapport à $(0, 1)$, C est étoilé par rapport à $(0, -1)$, d'où la conclusion.

Exemple 4. $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *ne sont pas homéomorphes.*

Si, par l'absurde, il existe un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, soit $a = f(0, 0)$. Alors $f_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ étant connexe, $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ l'est aussi, contradiction.

Proposition 10. *Soit U un* **ouvert dans un espace normé** $(E, \| \ \|)$. *Alors les composantes connexes de U sont ouvertes.*

Démonstration. Soit A une composante connexe de U. Si $x \in A$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. A et $B(x, r)$ sont connexes, d'intersection non vide, et donc $A \cup B(x, r)$ est une partie connexe de U contenant x. Il s'ensuit que $A \cup B(x, r) \subset A$, ou encore $B(x, r) \subset A$. □

5.3 Connexité par arcs

Définition 4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un* **arc** *dans X est une application* **continue** $f : [a, b] \to X$, *où $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $x = f(a)$, $y = f(b)$, on dit aussi que f est un arc* **de** x **à** y.
$(X, \mathcal{T})$ *est* **connexe par arcs** *si pour tout $x, y \in X$, il existe un arc de x à y.*

Proposition 11. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit X connexe par arcs. On fixe un $a \in X$. Pour chaque $x \in X$, soit $f_x \in C([a_x, b_x], X)$ telle $f_x(a_x) = a$, $f_x(b_x) = x$. Alors $A_x = f_x(I_x)$ est un connexe de X. De plus, on a $A_x \cap A_a \neq \emptyset$. Il s'ensuit que $\displaystyle\bigcup_{x \in X} A_x$ est connexe. Par ailleurs, on a $x \in A_x$, $x \in X$, et donc $\displaystyle\bigcup_{x \in X} A_x = X$. □

Définition 5. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in X$. On pose $x \cong y$ s'il existe un arc de x à y*

Lemme 1. *La relation $x \cong y$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. $f : [0, 1] \to X$, $f(t) \equiv x$, est un arc de x à x, et donc $x \sim x$. Si $f : [a, b] \to X$ est un arc de x à y, il est immédiat que $g : [a, b] \to X$, $g(t) = f(a + b - t)$, est un arc de y à x, et donc la relation est symétrique. Enfin, si $f : [a, b] \to X$, $g : [c, d] \to X$ sont un arc de x à y, respectivement de y à z, alors on voit facilement que $h : [a, b + d - c] \to X$, $h(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \in [a, b] \\ g(t + b - c), & \text{si } t \in [c, d] \end{cases}$, est un arc de x à z ; la relation est donc transitive. □

Exemple 5. *Dans un espace normé, un ensemble étoilé A est connexe par arcs.*

En effet, soit x_0 tel que $[x_0, x] \subset A, \forall\, x \in A$. Alors $x_0 \sim x, \forall\, x \in A$, car $f : [0,1] \to E$, $f(t) = x_0 + t(x - x_0)$ est un arc de x_0 à x. De la proposition précédente, on trouve que A est connexe par arcs.

Définition 6. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $x \in X$, on pose $\mathcal{D}_x = \{y \in X \ ;\ x \sim y\}$.*

Proposition 12. *a) $\mathcal{D}_x$ est la plus grande partie de X contenant x et connexe par arcs.*
b) On a $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{C}_x$.

La propriété a) justifie le nom de **composante connexe par arcs de** x qu'on donne à $\mathcal{D}_x$.

Démonstration. a) De la proposition précédente, $\mathcal{D}_x$ est connexe par arcs. Clairement, la definition de $\mathcal{D}_x$ implique que $\mathcal{D}_x$ contient toute partie connexe par arcs contenant x.
b) $\mathcal{D}_x$ est une partie connexe de X contenant x, et donc $\mathcal{D}_x \subset \mathcal{C}_x$. □

Proposition 13. *Si A est une partie de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{D}_x = \mathcal{C}_x$, $\forall\, x \in A$.*

Démonstration. On a vu que $\mathcal{C}_x$ est le plus grand intervalle de A contenant x. Il s'ensuit que $\mathcal{C}_x$ est un intervalle, qui est clairement connexe par arcs. On trouve que $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{D}_x$, d'où la conclusion. □

Théorème 13. *Soient $(E, \| \ \|)$ un espace normé et U un* **ouvert** *de E. Alors $\mathcal{D}_x = \mathcal{C}_x$, $x \in U$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{D}_y$ la composante connexe par arcs dans U de $y \in \mathcal{C}_x$. Clairement, $\mathcal{D}_y \subset \mathcal{C}_x$. On montre que $\mathcal{D}_y$ est un ouvert. En effet, soit $z \in \mathcal{D}_y$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(z,r) \subset \mathcal{C}_x$. $B(z,r)$ étant étoilée par rapport à z, on a $z \sim w$, $\forall\, w \in B(z,r)$. Comme on a aussi $z \sim w$, $\forall\, w \in \mathcal{D}_y$, on trouve que $\mathcal{D}_y \cup B(z,r)$ est connexe par arcs et contient y, d'où $B(z,r) \subset \mathcal{D}_y$.
Deux composantes connexes par arcs étant soit égales, soit disjointes (car $\sim$ est une relation d'équivalence), on trouve que $\mathcal{C}_x = \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_{x_i}$, les ensembles $\mathcal{D}_{x_i}$ étant mutuellement disjoints (on écrit cette union de sorte qu'il n'y ait pas de répétitions). On fixe un $i_0 \in I$. Alors $\mathcal{C}_x = \mathcal{D}_{x_{i_0}} \cup \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mathcal{D}_{x_i}$; il s'ensuit que $\mathcal{C}_x$ est une union de deux ouverts disjoints. $\mathcal{C}_x$ étant connexe, l'un de ces deux ouverts doit être vide, ce qui implique $I = \{i_0\}$. On trouve $\mathcal{C}_x = \mathcal{D}_{x_{i_0}}$; comme $x \in \mathcal{C}_x$, on doit avoir $\mathcal{C}_x = \mathcal{D}_x$. □

Corollaire 10. *Dans un espace normé, tout* **ouvert connexe** *est* **connexe par arcs**.