Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2022-2023**
L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie des espaces métriques

---

Corrigé de l'examen partiel du 10/11/22 (durée: 2h)

Les documents, téléphones portables, calculatrices, objets connectés, etc. sont interdits.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Lors de la correction, la plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.

Question de cours. *Soit (X,d) un espace métrique, et $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de (X,d). Montrer les propriétés suivantes.*

1. $\bigcup_{i\in I} O_i$ *est ouvert dans* (X,d).

   Soit $x \in \bigcup_{i\in I} O_i$. Il existe $i_x \in I$ tel que $x \in O_{i_x}$; fixons un tel i_x. Comme O_{i_x} est ouvert et $x \in O_{i_x}$ il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_{i_x}$. Donc $B(x,r) \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, ce qui prouve que $\bigcup_{i\in I} O_i$ est ouvert.

2. *Si I est fini, alors* $\bigcap_{i\in I} O_i$ *est ouvert dans* (X,d).

   Supposons I fini, et fixons $x \in \bigcap_{i\in I} O_i$. Pour tout $i \in I$, on peut trouver $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset O_i$ puisque $x \in O_i$ et O_i est ouvert. Alors $r = \min\{r_i : i \in I\}$ est strictement positif, puisque c'est le minimum d'un ensemble fini de réels strictement positifs. Pour tout $i \in I$, $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset O_i$, donc $B(x,r) \subset \bigcap_{i\in I} O_i$ et on a montré que $\bigcap_{i\in I} O_i$ est ouvert.

Exercice 1. *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier soigneusement sa réponse.*

1. *Soit (X,d) un espace métrique, et A, B deux parties de X.*

   (a) *L'adhérence de $A \cup B$ est égale à $\overline{A} \cup \overline{B}$.*
   C'est VRAI. Comme $\overline{A \cup B}$ est fermé et contient $A \cup B$, donc aussi A, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$; de même $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Par ailleurs, $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé en tant qu'union de deux fermés, et contient $A \cup B$, donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Par double inclusion, on conclut que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   (b) *L'intérieur de $A \cup B$ est égal à $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.*
   C'est FAUX. Par exemple, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ sont deux parties d'intérieur vide dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, mais leur réunion est $\mathbf{R}$, dont l'intérieur est $\mathbf{R} \neq \varnothing$.

2. *Dans cette question on munit $\boldsymbol{R}^2$ de la norme euclidienne. On considère* $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : |y| \leqslant 1 - x^2\}$.

   (a) $(1,0)$ *appartient à l'intérieur de A.*
   C'est FAUX. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $(1+2^{-n}, 0) \notin A$, mais $(1+2^{-n}, 0)$ converge vers $(1,0)$ quand $n \to +\infty$. Ceci montre que $(1,0) \notin \mathring{A}$.

   (b) *A est compact.*
   C'est VRAI. Comme $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, il nous suffit de justifier que A est fermé et borné. Pour voir que A est fermé, on peut par exemple considérer la fonction continue $f : (\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ définie par $f(x,y) = 1 - x^2 - |y|$. Alors $A = f^{-1}([0,+\infty[)$ est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $[0,+\infty[$ par la fonction continue f.

Pour voir que A est borné, on peut commencer par remarquer que pour tout $(x, y) \in A$ on a $0 \leqslant |y| \leqslant 1 - x^2$, donc $x^2 \leqslant 1$. Et puisque $|y| \leqslant 1 - x^2$ on a $|y| \leqslant 1$, donc $x^2 + y^2 \leqslant 2$. Finalement A est contenu dans $B_f(0, \sqrt{2})$ et A est donc borné dans $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$.
(on aurait aussi pu majorer $|x|$ et $|y|$ par 1 et utiliser que les parties bornées de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sont les mêmes que celles de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$).

<u>**Exercice 2.**</u> *Dans cet exercice on fixe un espace métrique non vide (X, d), et on considère l'espace vectoriel E constitué des fonctions bornées de X dans $\boldsymbol{R}$. On fixe $x_0 \in X$.*
Pour $f \in E$ on pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in X\}$.

1. *Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.*

   Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On note pour commencer que $\|f\|_\infty$ est positif puisque c'est la borne supérieure d'un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}^+$.

   On a $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)| \colon x \in X\} = 0$, ce qui arrive si, et seulement si, $f(x) = 0$ pour tout $x \in X$, autrement dit si et seulement si f est la fonction nulle.

   Si $\lambda = 0$, on a $\|0f\|_\infty = 0 = 0\|f\|_\infty$. Sinon, pour tout $x \in X$ on a $|\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leqslant |\lambda|\|f\|_\infty$, ce dont on en conclut que $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda|\|f\|_\infty$. Un raisonnement analogue donne (en supposant $\lambda \neq 0$)

   $$\|f\|_\infty = \|\frac{1}{\lambda}\lambda f\|_\infty \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty$$

   Quand $\lambda \neq 0$ on obtient donc aussi $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$.

   Reste à vérifier l'inégalité triangulaire; pour tout $x \in X$ on a

   $$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

   Il suit de cela que $\|f + g\|_\infty$ majore $\{|(f+g)(x)| \colon x \in X\}$, donc $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

2. *Pour $x \in X$, on considère une fonction $\varphi_x \colon X \to \boldsymbol{R}$ définie par $\varphi_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$.*

   (a) *Montrer que pour tout $x \in X$ on a $\varphi_x \in E$.*
   Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$ on a

   $$|\varphi_x(y)| = |d(y, x) - d(y, x_0)| \leqslant d(x, x_0)$$

   Ceci prouve que φ_x est bornée (et que $\|\varphi_x\|_\infty \leqslant d(x, x_0)$), autrement dit $\varphi_x \in E$.

   (b) *Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in X$ on a $\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\|_\infty = d(x_1, x_2)$.*
   Fixons $x_1, x_2 \in X$. Pour tout $y \in X$ on a

   $$|\varphi_{x_1}(y) - \varphi_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2)$$

   Donc $\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\|_\infty \leqslant d(x_1, x_2)$. Par ailleurs, on a $|\varphi_{x_1}(x_2) - \varphi_{x_2}(x_2)| = d(x_1, x_2)$, donc $\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\|_\infty \geqslant d(x_1, x_2)$.
   Ces deux inégalités nous permettent de conclure que $\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\|_\infty = d(x_1, x_2)$.

<u>**Exercice 3.**</u>

1. *Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:*

   (a) *Toute boule fermée de (X, d) est compacte.*

(b) *De toute suite bornée d'éléments de (X, d) on peut extraire une sous-suite convergente.*

Supposons que toute boule fermée de (X, d) est compacte. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'éléments de X. Il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on ait $d(x_n, x_0) \leqslant M$, autrement dit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite à valeurs dans $B_f(x_0, M)$. Puisque $B_f(x_0, M)$ est compacte, on peut extraire une sous-suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Réciproquement, supposons que toute suite bornée d'éléments de (X, d) admette une sous-suite convergente, et considérons une boule fermée $B_f(a, R)$ dans X (avec $a \in X$, $R \geqslant 0$). Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de $B_f(a, R)$; (x_n) est bornée et admet donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, qui converge vers $x \in X$. Comme $B_f(a, R)$ est fermé dans (X, d) (c'est une boule fermée) et $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente d'éléments de $B_f(a, R)$, on conclut que $x \in B_f(a, R)$. Ceci montre que $B_f(a, R)$ est compact.

2. *Soit (X, d) un espace métrique dans lequel toute boule fermée est compacte; soit F un fermé non vide de X et $x \in X$. On rappelle que $d(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in F\}$.*

   Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F)$.

   Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de F telle que $d(x, y_n) \to d(x, F)$ quand n tend vers $+\infty$. La suite $(d(x, y_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente de nombre réels, et est donc majorée par un certain $R \geqslant 0$. Donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans $B_f(x, R)$; et par hypothèse $B_f(x, R)$ est compact. On peut donc extraire une sous-suite convergente $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et sa limite y appartient à F puisque F est fermé dans (X, d) et chaque $y_{\varphi(n)}$ est un élement de F. Par continuité de $d(x, \cdot)$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x, y_{\varphi(n)}) = d(x, y)$, et on sait aussi que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x, y_{\varphi(n)}) = d(x, F)$ puisque $(d(y_{\varphi(n)}, x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite d'une suite qui converge vers $d(x, F)$. Finalement, on a bien montré qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F)$.

Exercice 4. *On note $E = C([0, 1], \boldsymbol{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\boldsymbol{R}$, et on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$; on rappelle que pour $f \in E$ on a $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.*
On fixe une fonction non nulle $g \in E$, et on considère

$$\varphi\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (\boldsymbol{R}, |\cdot|),\ f \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

On admet que φ est bien définie et que c'est une application linéaire.

1. *Justifier que g est bornée. On note $\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in [0, 1]\}$.*

   Comme $[0, 1]$ est compact, et que g est continue, on sait que g est bornée puisque toute fonction continue sur un compact est bornée.

2. *Montrer que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant \|g\|_\infty$.*

   Soit $f \in E$. On a $|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)g(x)|dx$.

   De plus, pour tout $x \in [0, 1]$ on a $|f(x)g(x)| \leqslant |f(x)|\|g\|_\infty$, et par positivité de l'intégrale on conclut que $|\varphi(f)| \leqslant \|g\|_\infty \int_0^1 |f(x)|dx = \|g\|_\infty\|f\|_1$.

   Comme φ est linéaire, cette inégalité montre à la fois que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant \|g\|_\infty$.

3. *Soit $\varepsilon > 0$.*

   (a) *Justifier qu'il existe $x_1 \in [0, 1]$ tel que $|g(x_1)| = \|g\|_\infty$.*

   Comme $|g|$ est continue sur le compact $[0, 1]$ et à valeurs réelles, elle est bornée et atteint ses bornes, en particulier il existe $x_1 \in [0, 1]$ tel que $|g(x_1)| = \|g\|_\infty$.

   Dans la suite, on suppose pour simplifier la rédaction que $x_1 \in]0, 1[$ et $g(x_1) = \|g\|_\infty$.

(b) *Justifier qu'il existe $N \in \boldsymbol{N}^*$ tel que $\left[x_1 - \frac{1}{N}, x_1 + \frac{1}{N}\right] \subset [0,1]$ et pour tout $x \in \left[x_1 - \frac{1}{N}, x_1 + \frac{1}{N}\right]$ on ait $g(x) \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$.*

Comme g est continue, l'ensemble $\{t \in [0,1] \colon g(x) > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ est ouvert dans $([0,1], |\cdot|)$; cet ensemble contient x_1, et il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ on ait

$$|x - x_1| < \delta_1 \Rightarrow g(x) > \|g\|_\infty - \varepsilon$$

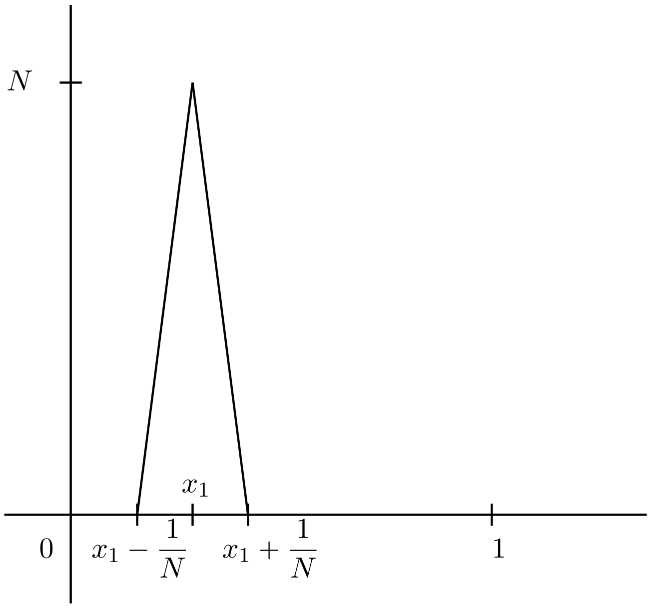
Comme $x_1 \in]0,1[$ qui est ouvert dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $]x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2[\subset]0,1[$. N'importe quel $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \min(\delta_1, \delta_2)$ satisfait la condition de l'énoncé.

(c) *On considère la fonction $f_N \colon [0,1] \to \boldsymbol{R}$ continue et telle que:*

- *$f_N(t) = 0$ si $t \leqslant x_1 - \frac{1}{N}$ ou $t \geqslant x_1 + \frac{1}{N}$;*
- *$f_N(x_1) = N$;*
- *f_N est affine sur $\left[x_1 - \frac{1}{N}, x_1\right]$ et sur $\left[x_1, x_1 + \frac{1}{N}\right]$.*

(d) *Représenter le graphe de f_N et montrer que $\|f_N\|_1 = 1$.*

Voici un dessin du graphe de f_N.



$\|f_N\|_1$ est l'aire d'un triangle dont un côté est de longueur $\frac{2}{N}$ et la hauteur s'appuyant sur ce côté est de longueur N. Donc $\|f_N\|_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{N} \times N = 1$.

(e) *Montrer que $|\varphi(f_N)| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$.*

Puisque f_N est à valeurs positives, et $g(x) \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$ sur $\left[x_1 - \frac{1}{N}, x_1 + \frac{1}{N}\right]$, on a

$$|\varphi(f_N)| \geqslant \int_{x_1 - \frac{1}{N}}^{x_1 + \frac{1}{N}} |f_N(x) g(x)| dx \geqslant \int_{x_1 - \frac{1}{N}}^{x_1 + \frac{1}{N}} f_N(x)(\|g\|_\infty - \varepsilon) dx = \|g\|_\infty - \varepsilon \ .$$

4. *Déterminer $|||\varphi|||$.*

Fixons $\varepsilon > 0$ et trouvons N comme à la question précédente. Comme $\|f_N\|_1 = 1$, on sait que $|\varphi(f_N)| \leqslant |||\varphi|||$, et il suit donc du calcul précédent que $|||\varphi||| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut que $|||\varphi||| \geqslant \|g\|_\infty$.

Comme l'inégalité réciproque avait été établie plus haut, on obtient finalement $|||\varphi||| = \|g\|_\infty$.

Exercice 5. *Dans cet exercice on considère l'espace* $E = C([0,1),\boldsymbol{R})$ *des fonctions continues de* $[0,1]$ *dans* $\boldsymbol{R}$. *Sur* E *on considère les deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *définies par les formules suivantes:*

$$\forall f \in E \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt\ , \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in [0,1]\}$$

On considère les parties $A_1 = \{f \in E\colon f([0,1]) \subseteq [0,1]\}$ *et* $A_2 = \{f \in E\colon f([0,1]) \supseteq [0,1]\}$.

1. *Montrer que* A_1 *est fermée dans* $(E,\|\cdot\|_\infty)$.

   Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A_1 qui converge vers f dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$. Soit $x \in [0,1]$. Puisque $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$; comme $[0,1]$ est fermé dans $(\mathbf{R},|\cdot|)$ et $f_n(x) \in [0,1]$ pour tout n, on conclut que $f(x) \in [0,1]$. Donc $f \in A_1$, et on a montré que A_1 est fermé.

2. *Montrer que* A_2 *est fermé dans* $(E,\|\cdot\|_\infty)$.

   Le théorème des valeurs intermédiaires permet de voir qu'une fonction continue f appartient à A_2 si, et seulement si, il existe $x, y \in [0,1]$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$.

   Notons $B = \{f \in E\colon \exists x \in [0,1] f(x) = 0\}$ et $C = \{f \in E\colon \exists y \in [0,1]\ f(y) = 1\}$. Montrons que B et C sont fermés; pour cela, considérons une suite convergente $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de B, de limite $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de limite $x \in [0,1]$. On a pour tout n que

   $$|f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| \leqslant \|f - f_{\varphi(n)}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

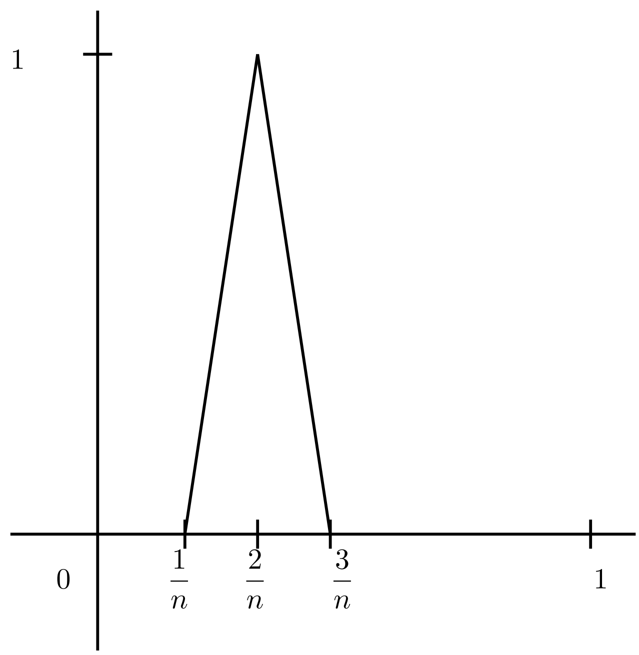
   Comme $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = 0$ pour tout n, il suit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = 0$; par continuité de f on conclut que $f(x) = 0$. Donc $f \in B$, qui est par conséquent fermé dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$.

   On montre de même que C est fermé, et finalement $A_2 = B \cap C$ est fermé dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$.

3. *Montrer que* $\{f \in E\colon f([0,1]) = [0,1])$ *est fermé dans* $(E,\|\cdot\|_\infty)$. *Est-il fermé dans* $(E,\|\cdot\|_1)$*?*

   On a $\{f \in E\colon f([0,1]) = [0,1]) = A_1 \cap A_2$, cet ensemble est donc fermé dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$ en tant qu'intersection de deux fermés.

   Cet ensemble n'est pas fermé dans $(E,\|\cdot\|_1)$. Par exemple, pour $n \geqslant 3$ considérons la fonction $f_n(x)$ dont le graphe est représenté ci-dessous.



   On a $f_n([0,1]) = [0,1]$ pour tout $n \geqslant 3$, mais $(f_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers la fonction nulle puisque $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 3$.