Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2022-2023**
L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie des espaces métriques

---

Examen partiel
10 novembre 2022 - Durée : 2h

Les documents, téléphones portables, calculatrices, objets connectés, etc. sont interdits.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Lors de la correction, la plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.

Question de cours. Soit (X, d) un espace métrique, et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de (X, d). Montrer les propriétés suivantes.

1. $\bigcup_{i \in I} O_i$ est ouvert dans (X, d).
2. Si I est fini, alors $\bigcap_{i \in I} O_i$ est ouvert dans (X, d).

Exercice 1. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier soigneusement sa réponse.

1. Soit (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X.
   (a) L'adhérence de $A \cup B$ est égale à $\overline{A} \cup \overline{B}$.
   (b) L'intérieur de $A \cup B$ est égal à $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.
2. Dans cette question on munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne. On considère $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon |y| \leqslant 1 - x^2\}$.
   (a) $(1, 0)$ appartient à l'intérieur de A.
   (b) A est compact.

Exercice 2. Dans cet exercice on fixe un espace métrique non vide (X, d), et on considère l'espace vectoriel E constitué des fonctions bornées de X dans $\mathbf{R}$. On fixe $x_0 \in X$.
Pour $f \in E$ on pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in X\}$.

1. Montrer que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur E.
2. Pour $x \in X$, on définit une fonction $\varphi_x \colon X \to \mathbf{R}$ en posant $\varphi_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in X$ on a $\varphi_x \in E$.
   (b) Montrer que pour tout $x_1, x_2 \in X$ on a $\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\|_\infty = d(x_1, x_2)$.

Exercice 3.

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
   (a) Toute boule fermée de (X, d) est compacte.
   (b) De toute suite bornée d'éléments de (X, d) on peut extraire une sous-suite convergente.
2. Soit (X, d) un espace métrique dans lequel toute boule fermée est compacte; soit F un fermé non vide de X et $x \in X$. On rappelle que $d(x, F) = \inf\{d(x, y) \colon y \in F\}$.

   Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, y) = d(x, F)$.

Exercice 4. On note $E = C([0,1], \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, et on le munit de la norme $\|\cdot\|_1$; on rappelle que pour $f \in E$ on a $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.
On fixe une fonction non nulle $g \in E$, et on considère

$$\varphi \colon (E, \|\cdot\|_1) \to (\mathbf{R}, |\cdot|),\ f \mapsto \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

On admet que φ est bien définie et que c'est une application linéaire.

1. Justifier que g est bornée. On note $\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| \colon x \in [0,1]\}$.
2. Montrer que φ est continue et que $|||\varphi||| \leqslant \|g\|_\infty$.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifier qu'il existe $x_1 \in [0,1]$ tel que $|g(x_1)| = \|g\|_\infty$. Dans la suite, on suppose pour simplifier la rédaction que $x_1 \in]0,1[$ et $g(x_1) = \|g\|_\infty$.
   (b) Justifier qu'il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\left[x_1 - \frac{1}{N}, x_1 + \frac{1}{N}\right] \subset [0,1]$ et pour tout $x \in \left[x_1 - \frac{1}{N}, x_1 + \frac{1}{N}\right]$ on ait $g(x) \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$.
   (c) On considère la fonction $f_N \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ continue et telle que:
      - $f_N(t) = 0$ si $t \leqslant x_1 - \frac{1}{N}$ ou $t \geqslant x_1 + \frac{1}{N}$;
      - $f_N(x_1) = N$;
      - f_N est affine sur $\left[x_1 - \frac{1}{N}, x_1\right]$ et sur $\left[x_1, x_1 + \frac{1}{N}\right]$.
   (d) Représenter le graphe de f_N et montrer que $\|f_N\|_1 = 1$.
   (e) Montrer que $|\varphi(f_N)| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon$.
4. Déterminer $|||\varphi|||$.

Exercice 5. Dans cet exercice on considère l'espace $E = C([0,1), \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Sur E on considère les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies par les formules suivantes:

$$\forall f \in E \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt\ , \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in [0,1]\}$$

On considère les parties $A_1 = \{f \in E \colon f([0,1]) \subseteq [0,1]\}$ et $A_2 = \{f \in E \colon f([0,1]) \supseteq [0,1]\}$.

1. Montrer que A_1 est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Montrer que A_2 est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
3. Montrer que $\{f \in E \colon f([0,1]) = [0,1]\}$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Cet ensemble est-il fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$?