Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques générales

Topologie des espaces métriques. Correction du partiel d'Octobre 2025 (2h)

Question de cours. Démontrer que si $L\colon E \to F$ est une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, alors

$$\exists C \geq 0\colon \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Exercice 1. Soit d la distance usuelle sur **R** et soit d_1 l'application de **R** $\times$ **R** dans **R** qui à (x, y) associe $|\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. Montrer que d_1 est une distance sur **R**.
2. Décrire la boule $B(1, \pi/4)$ relativement à d_1.
3. Démontrer que, pour toute suite réelle (x_n) et tout réel x, on a $x_n \overset{d}{\to} x$ si et seulement si $x_n \overset{d_1}{\to} x$.
4. Les distances d_1 et d sont-elles Lipschitz-équivalentes ? Sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie $A \subset X$, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.
2. Montrer que si A est ouvert alors $\alpha(A) \supset A$, et que si A est fermé alors $\beta(A) \subset A$.
3. Montrer que $\alpha^2(A) = \overset{\circ}{\overbrace{\beta(\overline{A})}}$. Conclure que $\alpha^2 = \alpha$.
   (On pourrait démontrer de la même manière, mais on ne demande pas de le faire, que $\beta^2 = \beta$).
4. Démontrer que $\alpha(A^c) = \beta(A)^c$.

Exercice 3. Soit $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ et $L\colon E \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$\forall f \in E, \quad L(f) = f(0) - f(1).$$

On considère les deux normes sur E définies par

$$\forall f \in E\colon \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$

On note $N = \{f \in E\colon L(f) = 0\}$.

1. Démontrer que L est linéaire.
2. Démontrer que $L\colon (E, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est continue et calculer la norme subordonnée de L.
3. Démontrer que $L\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est discontinue.
4. Démontrer que N est un fermé d'intérieur vide dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Démontrer que N est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
   (Indication : pour $f \in E$, on pourra considérer la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de N, avec f_n égale à f sur l'intervalle $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ et affine sur $[1 - \frac{1}{n}, 1]$, et remarquer que pour chaque n, $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.)

Correction

Exercice 1.

1. On a, pour tout $x, y, z \in \mathbf{R}$: $d_1(x,y) \geq 0$ et si $d_1(x,y) = 0$ alors $\arctan(x) = \arctan(y)$ et donc $x = y$, parce que $\arctan$ est injective dans $\mathbf{R}$; dautre part, $d_1(x,x) = 0$. Ensuite :
   $d_1(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| = |\arctan(y) - \arctan(x)| = d_1(y,x)$.
   $d_1(x,y) \leq |\arctan(x) - \arctan(z)| + |\arctan(z) - \arctan(y)| = d_1(x,z) + d_1(z,y)$.
2. $B(1, \frac{\pi}{4}) = \{x \in \mathbf{R} \colon |\arctan(x) - \arctan(1)| < \frac{\pi}{4}\} = \{x \in \mathbf{R} \colon 0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}\} =]0, +\infty[$.
3. Pout tout suite réelle (x_n) et tout réel x on a
   $$x_n \xrightarrow{d_1} x \iff |\arctan(x_n) - \arctan(x)| \to 0 \iff \arctan(x_n) \xrightarrow{d} \arctan(x) \iff x_n \xrightarrow{d} x,$$
   où nous avons utilisé la continuité sur $\mathbf{R}$ de l'application $t \mapsto \arctan(t)$ et la continuité sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'application $t \mapsto \tan(t)$, pour la topologie usuelle.
4. On a $\frac{d(n,0)}{d_1(n,0)} = \frac{n}{\arctan(n)} \to +\infty$. Les deux distances ne peuvent donc pas être Lipschitz-équivalentes. Par contre, la propriété 3 assure que d et d_1 sont topologiquement équivalentes (i.e. elles induisent la même topologie).

Exercice 2.

1. Les opérations d'adhérence et d'intérieur respectent l'inclusion. On a alors
   $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow \alpha(A) \subset \alpha(B)$.
   De plus $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \Rightarrow \beta(A) \subset \beta(B)$.
2. On a $A \subset \overline{A}$. Supposons A ouvert. Alors, en prenant terme-à-terme l'intérieur, $A = \overset{\circ}{A} \subset \alpha(A)$.
   Supposons A fermé. Alors, en prenant terme-à-terme l'adhérence, $\beta(A) \subset \overline{A} = A$.
3. L'égalité est immédiate : les deux membres sont égaux à $\overline{\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}}$.
   Pour toute partie A de X, $\alpha(A)$ est ouvert, donc $\alpha^2(A) \supset \alpha(A)$ d'après 2. Réciproquement, d'après 3, $\alpha^2(A) = \overset{\circ}{\overbrace{\beta(\overline{A})}} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$, où nous avons utilisé 2. Mais alors $\alpha^2(A) \subset \alpha(A)$ et donc $\alpha^2(A) = \alpha(A)$ par double inclusion.
4. $\alpha(A^c) = (\overline{A^c})^\circ = \left((\overset{\circ}{A})^c\right)^\circ = \left(\overline{\overset{\circ}{A}}\right)^c = \beta(A)^c$.

Exercice 3.

1. Pour $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $L(f + \lambda g) = f(0) + \lambda g(0) - f(1) - \lambda g(1) = L(f) + \lambda L(g)$.
2. Pour tout $f \in E$ on a $|L(f)| \leq |f(1) - f(0)| \leq |f(0)| + |f(1)| \leq 2\|f\|_\infty$. Donc L est continue et la norme subordonnée de $L \colon (E, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbf{R}$ vérifie $|||L||| \leq 2$. Réciproquement si $g \in E$ est la fonction définie par $g(x) = 1 - 2x$, on a $|L(g)| = 2$ et $\|g\|_\infty = 1$. Donc $|||L||| \geq 2$.
3. Considérons, pour $n \in \mathbf{N}^*$, la suite $(f_n) \subset E$, définie par $f_n(x) = x^n$. On a $\frac{|L(f_n)|}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{\|f_n\|_1} = n + 1 \to +\infty$. Ceci montre que $L \colon (E, \|\cdot\|_1) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est discontinue.

4. On a $N = L^{-1}(\{0\})$. C'est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbf{R}$ par l'application continue L.

   Considérons la fonction $I \in E$, définie par $I(x) = x$. Si, par contradiction, il existe $f \in \overset{\circ}{N}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(f, r) \subset N$. Mais $f + \frac{r}{2} I \in B(f, r)$, puisque $\|(f + \frac{r}{2}I) - f\|_\infty = \frac{r}{2}\|I\|_\infty = \frac{r}{2}$. Or, $L(f + \frac{r}{2}I) = L(f) + \frac{r}{2}L(I) = 0 + \frac{r}{2} \neq 0$, donc $f + \frac{r}{2}I \notin N$. Ceci prouve que $\overset{\circ}{N}$ est vide.

5. Soit $f \in E$ et $f_n \in N$ l'application définie comme dans l'indication. Observons que, par définition, $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. De plus, $\|f - f_n\|_1 = \int_{1-1/n}^{1} |f - f_n| \leq \frac{1}{n}\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{2}{n}\|f\|_\infty$. Donc $\|f_n - f\|_1 \to 0$ et comme $(f_n) \subset N$, on conclut que N est dense dans E.