Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques générales

Topologie des espaces métriques. Partiel. Durée 2h. Octobre 2025

Question de cours. Démontrer que si $L\colon E \to F$ est une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, alors

$$\exists C \geq 0\colon \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Exercice 1. Soit d la distance usuelle sur **R** et soit d_1 l'application de **R** $\times$ **R** dans **R** qui à (x, y) associe $|\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. Montrer que d_1 est une distance sur **R**.
2. Décrire la boule $B(1, \pi/4)$ relativement à d_1.
3. Démontrer que, pour toute suite réelle (x_n) et tout réel x, on a $x_n \xrightarrow{d} x$ si et seulement si $x_n \xrightarrow{d_1} x$.
4. Les distances d_1 et d sont-elles Lipschitz-équivalentes ? Sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie $A \subset X$, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\alpha(A) \subset \alpha(B)$ et $\beta(A) \subset \beta(B)$.
2. Montrer que si A est ouvert alors $\alpha(A) \supset A$, et que si A est fermé alors $\beta(A) \subset A$.
3. Montrer que $\alpha^2(A) = \overset{\circ}{\overbrace{\beta(\overline{A})}}$. Conclure que $\alpha^2 = \alpha$.
   (On pourrait démontrer de la même manière, mais on ne demande pas de le faire, que $\beta^2 = \beta$).
4. Démontrer que $\alpha(A^c) = \beta(A)^c$.

Exercice 3. Soit $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ et $L\colon E \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$\forall f \in E, \quad L(f) = f(0) - f(1).$$

On considère les deux normes sur E définies par

$$\forall f \in E\colon \quad \|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

On note $N = \{f \in E\colon L(f) = 0\}$.

1. Démontrer que L est linéaire.
2. Démontrer que $L\colon (E, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est continue et calculer la norme subordonnée de L.
3. Démontrer que $L\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est discontinue.
4. Démontrer que N est un fermé d'intérieur vide dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Démontrer que N est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
   (Indication : pour $f \in E$, on pourra considérer la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de N, avec f_n égale à f sur l'intervalle $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ et affine sur $[1 - \frac{1}{n}, 1]$, et remarquer que pour chaque n, $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.)