Université Claude Bernard Lyon 1
Année universitaire 2023 – 2024

Licence de Mathématiques
Topologie des espaces métriques

Partiel du 27 octobre 2023 - Durée : 2h

Les téléphones portables, calculatrices, objets connectés et tous les documents sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 `Questions de cours, 5 pt.`

Soit (X,d) un espace métrique.

1. Rappeler la définition d'un ouvert de X.
2. Montrer que toute boule ouverte de X est un ouvert de X.
3. Montrer que pour toutes parties A et B de X, l'intérieur de $A \cap B$ est égal à $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. Montrer que pour toutes parties A et B de X, l'union $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est incluse dans l'intérieur de $A \cup B$.
5. Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.

Exercice 2 `Une application linéaire continue, 4 pt.`

On note X l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$x : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \mapsto x(n).$$

On munit X de la norme infinie définie pour $x \in X$ par $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|$.

On considère l'application $\Phi : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto x(17) + x(18)$.

1. Montrer que Φ est une application linéaire, puis qu'elle est continue sur X.
2. Calculer sa norme subordonnée.

Exercice 3 `Diamètre de l'adhérence d'une partie, 4 pt.`

Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une partie non vide A de X est bornée si $\{d(a,b) \colon a \in A,\ b \in A\}$ est une partie majorée de $\mathbf{R}$. Dans ce cas on appelle diamètre de A la borne supérieure des distances entre deux points de A :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(a,b)\in A^2} d(a,b).$$

1. Montrer que si A est une partie non vide bornée de X alors son adhérence est également bornée.
2. Montrer que $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

Exercice 4 `Somme de deux ensembles, 6 pt.`

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{a + b\ ;\ a \in A,\ b \in B\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors pour tout $b \in E$, $A + \{b\}$ est ouvert.
2. En déduire que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.

On se place maintenant dans $\mathbf{R}^2$ muni de la norme euclidienne et on considère les parties

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ xy = 1\} \text{ et } D = \{0\} \times \mathbf{R}.$$

3. Montrer que C et D sont fermées.
4. Montrer que $C + D$ n'est pas fermée.

Exercice 5 `Adhérence dans l'espace des fonctions continues, 3 pt.`

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbf{R}$. On considère les deux normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ définies sur E par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \text{ pour } f \in E.$$

On note $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

1. Déterminer l'adhérence de F dans $(E, \|.\|_\infty)$.
2. Montrer que, dans $(E, \|.\|_1)$, l'adhérence de F est égale à E.