Université Lyon 1

UNIVERSITE LYON 1

**Année universitaire :** 23/24

Diplôme : L3 Maths Générales

Epreuve : Topologie

Date : 27/10

NOTE : I : 5 II : 4 III : 4 IV : 6 V : 3

Numéro à reporter sur les intercalaires : 0574295 Nombre d'intercalaires : 1

EXERCICE 1 :

1

(1) Soit $U \subset X$, on dit que $U$ est un ouvert si : $\forall x \in U$, $\exists r>0$ tq $B(x,r) \subset U$.

1

(2) soit $x \in X$, $r>0$, Soit $y \in B(x,r)$, $d(x,y)<r$
Ainsi $\exists \varepsilon > 0$ tq $0 < \varepsilon < r - d(x,y)$.
Pour un tel $\varepsilon$, on a alors $\forall y' \in B(y,\varepsilon)$,
$d(x,y') \leq d(x,y) + d(y,y') < r$. D'où $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$.

Ainsi on a montré que $B(x,r)$ est un ouvert de $X$.

D'où le résultat.

(3) ~~soit $x \in \mathring{\overbrace{A \cap B}}$, ainsi $\exists r>0$ tq $B(x,r) \subset \mathring{\overbrace{A\cap B}}$~~

~~soit $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, ainsi $\exists r_A, r_B > 0$ tq $B(x,r_A) \subset \mathring{A}$ et $B(x,r_B) \in \mathring{B}$~~

~~On utilise que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$~~.

Ainsi ~~$\mathring{\overbrace{A\cap B}} = \overline{(A \cap B)^c} = \overline{A^c \cup B^c} = \overline{A^c} \cup \overline{B^c} = A°$~~

~~(3) Soit $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, ainsi $\exists\, r_A, r_B > 0$ tq $\begin{cases} B(x, r_A) \subset A \\ B(x, r_B) \subset B \end{cases}$~~

(3) soit $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, ainsi $\exists\, r_A, r_B > 0$ tq $\begin{cases} B(x, r_A) \subset \mathring{A} \subset A \\ B(x, r_B) \subset \mathring{B} \subset B \end{cases}$

On a alors que $B(x, r_A) \cap B(x, r_B) \subset A \cap B$.

De plus c'est un ouvert (intersection finie d'ouverts).

Et ainsi $B(x, r_A) \cap B(x, r_B) \subset \overset{\circ}{A \cap B}$.

D'où $x \in \overset{\circ}{A \cap B}$. Donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$

Réciproquement, si $x \in \overset{\circ}{A \cap B}$, alors $\exists\, r > 0$ tq $B(x, r) \subset A \cap B$

Donc $\begin{cases} B(x, r) \subset A \\ B(x, r) \subset B \end{cases}$. Et puisque c'est un ouvert, on a $\begin{cases} B(x, r) \subset \mathring{A} \\ B(x, r) \subset \mathring{B} \end{cases}$

Et donc $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Ainsi $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$

1,5 et donc par double inclusion, $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

(4) soit $x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$, ainsi on suppose que $x \in \mathring{A}$.
On a alors $r>0$ tq $B(x,r) \subset A$. Donc dans $A \cup B$.
Finalement c'est un ouvert, on en déduit $B(x,r) \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$.
D'où $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$.

1

~~(5) $A = \{1\} \setminus \{2\}$, $B = ]1;2[$. On a $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \emptyset \cup ]1;2[ = ]1;2[$~~

(5.) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
On a alors $\begin{cases} \mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset \\ \overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathbb{R} \end{cases}$

0,5

EXERCICE 2 :

1) soit $x, x' \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda x + x') &= (\lambda x + x')(17) + (\lambda x + x')(18) \\ &= \lambda x(17) + x'(17) + \lambda x(18) + x'(18) \\ &= \lambda (x(17) + x(18)) + x'(17) + x'(18) \\ &= \lambda \Phi(x) + \Phi(x') \end{aligned}$$

1

Donc $\Phi$ est bien linéaire sur $X$.

(2.) $\forall x \in X$, $|\Phi(x)| = |x(17) + x(18)| \leqslant 2 \|x\|_\infty$

Par linéarité, on en déduit que $\Phi$ est 2-lipschitzienne sur $X$.

1,5

Ainsi puisqu'elle est lipschitzienne sur $X$, elle est continue sur $X$.

(3.) On remarque que $\forall x \in X$, $\frac{|\Phi(x)|}{\|x\|_\infty} \leqslant 2$.

Ainsi $|||\Phi||| \leqslant 2$
De plus, pour toute suite constante $x : n \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$,
on a $x \in X$ et $|\Phi(x)| = 2\|x\|_\infty$

1,5

On en déduit que $|||\Phi||| = 2$.

EXERCICE 3 :

~~(1) soit $x \in \bar{A}$, ainsi $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui tend vers $x$.~~

~~Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,~~

$\boxed{\text{On suppose A bornée, non vide}}$

(1) soit $x, y \in \bar{A}$, ainsi $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui ont respectivement pour limite $x$ et $y$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, y_n) \leq \mathrm{diam}(A)$.

Et donc par passage à la limite $d(x,y) \leq \mathrm{diam}(A)$.

(puisque la distance est continue.)

~~Ainsi $\mathrm{diam}(\bar{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$~~.

On a alors que $\{d(x,y) \mid x \in \bar{A}, y \in \bar{A}\}$ est majorée par $\mathrm{diam}(A) \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\bar{A}$ est bornée également et $\mathrm{diam}(\bar{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$.

(2) par caractérisation de $\mathrm{diam}(A)$ comme borne supérieure, il existe une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (A^2)^{\mathbb{N}}$ tq $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = \mathrm{diam}(A)$.

Mais $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\bar{A}^2)^{\mathbb{N}}$. Et ainsi puisque $\mathrm{diam}(\bar{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$ et qu'il existe $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\bar{A}^2)^{\mathbb{N}}$ tq $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{diam}(A)$.

On en déduit $\mathrm{diam}(\bar{A}) \geq \mathrm{diam}(A)$.

et $\mathrm{diam}(\bar{A}) = \mathrm{diam}(A)$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 0574295

EXERCICE 4 : ~~B1)~~

(1) Supposons $A$ ouvert, soit $\varphi : \begin{cases} E & \to E \\ x & \mapsto x - b \end{cases}$

On remarque que $\forall (x,y) \in E$,

$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_E = \|x - b - y + b\|_E = \|x - y\|_E$.

On en déduit que $\varphi$ est continue.

De plus $A + \{b\} = \varphi^{-1}(A)$.

Donc par continuité, $A + \{b\}$ est ouvert.

1

(2) $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + \{b\})$. Ainsi en tant que réunion d'ouverts, $A+B$ est un ouvert.

2

(3) soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n = 1$.

~~Par continuité de $(x,y) \mapsto xy$~~

Par continuité de $(x,y) \mapsto xy$ sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit par passage à la limite que $xy = 1$.

Donc $(x,y) \in C$. Donc $C$ est fermée.

$D$ est un produit fini de fermé, $D$ est donc fermée.

1,5

(4) ~~On considère $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$~~

On considère $(c_n = (\frac{1}{n}, n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n = (0, -n))_{n\in\mathbb{N}}$.

On a clairement que $c_n + d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$.

Mais $(0,0) \notin C + D$.

Ainsi $C+D$ n'est pas fermée.

1,5

EXERCICE 5 :

(1) soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ tq qu'il $\exists f$

$\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi $\sup_{t\in[0;1]} |f(t)-f_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

En particulier $|f(0)-f_n(0)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

C'est-à-dire $|f(0)-0| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $f(0)=0$.

Finalement $f \in F$. Donc $F$ est fermée, on en déduit $\overline{F} = F$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. (pour $\|\cdot\|_\infty$).

1

(2) soit $g \in E$, soit $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} g(\frac{1}{n})nx & \text{si } x\in[0;\frac{1}{n}[ \\ g(x) & \text{si } x\in]\frac{1}{n};1] \end{cases}$ et en $1/n$.

On a alors que $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(0)=0$ et $f_n$ est continue sur $[0;1]$.

Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$.

D'autre part, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\|g-f_n\|_1 = \int_0^1 |g(t)-f_n(t)|dt$

$= \int_0^{1/n} |g(t)-g(\frac{1}{n})nt|\,dt + \cancel{\int_{1/n}^1 |g(t)-g(t)|\,dt}$

$= \int_0^{1/n} |g(t)-g(\frac{1}{n})nt|\,dt$

$\leqslant \int_0^{1/n} 2\|g\|_\infty\,dt$ car d'après le théorème des bornes atteintes, $g$ est bornée sur $[0;1]$. (et atteint ses bornes)

$= \frac{2}{n}\|g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2 On en déduit alors que $\|g-f_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Et ainsi $g \in \overline{F}$ (pour $\|\cdot\|_1$). D'où $\overline{F} = E$ (pour $\|\cdot\|_1$).