Feuille d'exercices n° 2
Ouverts, fermés, adhérences, intérieurs, parties denses, sous-espaces

Exercice 1. On munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne. Les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ y \geq 0\}$ *b)* $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ *c)* $\{(x,x^2) : x \in \mathbf{R}\}$

d) $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbf{N}^*\right\}$ *e)* $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ *f)* $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$

Exercice 2. Dans un espace métrique de votre choix, donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas fermée, puis un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.

Exercice 3. On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$, puis $A = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$.

1. Dans cette question, on munit E de la norme $\|.\|_\infty$. L'ensemble A est-il fermé ? Est-il ouvert ?
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|.\|_1$. L'ensemble A est-il fermé ? Est-il ouvert ?
3. Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 4. On munit $\mathbf{R}^2$ de la distance euclidienne, et on note $A = [0,1[\times[0,1[$. Pour chacun des énoncés ci-dessous, dire et justifier s'il est vrai ou faux :

a) $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in \overline{A}$ *b)* $(1,1) \in \overline{A}$ *c)* $(0,0) \in \mathring{A}$ *d)* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \in \mathring{A}$

Exercice 5. On munit $\mathbf{R}$ de la distance usuelle.

1. Déterminer l'intérieur et l'adhérence dans $\mathbf{R}$ de $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^*\right\}$, puis de $\mathbf{Z}$, puis de $]-1,1[\cap\mathbf{Q}$.
2. Fournir un exemple d'une partie A de $\mathbf{R}$ pour laquelle les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ sont tous distincts.

Exercice 6. On dit qu'un point a d'un espace métrique (X,d) est **isolé** lorsque le singleton $\{a\}$ est ouvert dans X. Quels sont les points isolés des espaces suivants, tous munis de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbf{R}$?

$$\mathbf{Z}, \qquad \mathbf{Q}, \qquad \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^*\right\}, \qquad \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^*\right\}$$

Exercice 7. Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soit A un ouvert de X et B une partie quelconque de X. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
   En utilisant des intervalles de $\mathbf{R}$, montrer que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas ouvert.
2. Dans $\mathbf{R}$, donner des exemples d'ouverts A et B tels que les ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$ soient tous différents.
3. Soit A un ouvert dense dans X et B une partie dense dans X. Montrer que $A \cap B$ est dense dans X.

Exercice 8. On considère $X = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$x : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \mapsto x(n).$$

On munit X de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|$. On note $Y = \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \lim_{n \to +\infty} x(n) = 0\}$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. Montrer que Y est fermé dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$.
3. On note Z l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Z est dense dans Y mais que Z n'est pas dense dans X.

Exercice 9.

1. Soit $p \in [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que l'ensemble Z des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense dans $\ell^p(\mathbf{R})$.
   (b) En déduire que $\ell^p(\mathbf{R})$ est séparable.
2. Montrer que $\ell^\infty(\mathbf{R})$ n'est pas séparable. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument diagonal.*

Exercice 10.

1. Soit $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x > 0\}$, muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbf{R}$. L'intervalle $]0, \pi[$ est-il ouvert dans A ? Est-il fermé dans A ?
2. Soit $B =]0, 2]$, muni de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbf{R}$. Quelle est l'adhérence de $]0, 1[$ dans B ? Quel est l'intérieur de $[1, 2]$?

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie non vide A de X, on définit la distance à A par

$$d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Montrer que pour toute partie non vide A de X, l'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, *i.e.* pour tout $x \in X$, $y \in X$, on a : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
2. Soit A une partie non vide de X, $x \in X$. Montrer que x appartient à $\overline{A}$ si et seulement si on a $d(x, A) = 0$.
3. Montrer que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X.
4. Soit A et B deux parties non vides de X. Montrer que l'ensemble $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
5. En déduire que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe deux parties U et V ouvertes et disjointes de X telles que $A \subset U$ et $B \subset V$.
6. *Lemme d'Urysohn.* Montrer que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe une application $f : X \to \mathbf{R}$ continue telle que
   (i) pour tout $x \in A$, $f(x) = 0$,
   (ii) pour tout $x \in B$, $f(x) = 1$,
   (iii) pour tout $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
   Indication : considérer f définie par $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.