
Feuille d'exercices n° 1 - Espaces métriques et espaces normés

---

Exercice 1.

On définit, pour $j = 1, \ldots, 4$, l'application $d_j : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \quad d_2(x,y) = |x-2y|, \quad d_3(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \quad d_4(x,y) = |x^2 - y^2|.$$

Parmi ces applications, la(les)quelle(s) défini(ssen)t une distance sur $\mathbf{R}$?

Exercice 2.

Soit A un ensemble (à penser comme un alphabet) et $n \geq 1$ un entier. Sur l'ensemble A^n des mots de longueur n écrits dans l'alphabet A, on pose :

$$d(x,y) = \mathrm{Card}\{i \in \{1, \cdots, n\} \mid x_i \neq y_i\}.$$

Montrer que d est une distance sur A^n (la « distance de Hamming »).

Exercice 3.

Dans cet exercice, on note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbf{R}^2$. Pour x et y éléments de $\mathbf{R}^2$, on pose :

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\|, & \text{si } x \text{ et } y \text{ ne sont pas colinéaires;} \\ \|x-y\| & \text{s'ils sont colinéaires.} \end{cases}$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbf{R}^2$ (la « distance SNCF »).

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique, soit a un point de X et soit (r_n) une suite bornée de réels strictement positifs. On note $R = \sup_{n \in \mathbf{N}} r_n$.

Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B(a, r_n) = B(a,R)$ où $B(a,R)$ désigne une boule ouverte de centre a et de rayon R. Que peut-on dire de $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} B'(a, r_n)$ (où B' désigne la boule fermée) ?

Exercice 5. Soit (X,d) un espace métrique, et soit U une partie de X. Montrer que U est un ouvert de X si et seulement si il existe une famille de boules ouvertes dans X dont U est la réunion.

Exercice 6. Soit X un ensemble, soit d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que d_1 et d_2 définissent la même topologie sur X si et seulement si toute boule ouverte pour d_1 est un ouvert pour d_2 et toute boule ouverte pour d_2 est un ouvert pour d_1.

Exercice 7. Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soit $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une application croissante qui s'annule uniquement en 0 et qui vérifie la propriété suivante (« sous-additivité ») :

$$\text{pour tous } u, v \in \mathbf{R}^+, \phi(u+v) \leq \phi(u) + \phi(v).$$

   Montrer que l'application δ définie par $\delta = \phi \circ d$ est une distance sur X.

2. Dans cette question, on note $\phi(u) = \dfrac{u}{1+u}$.
   (a) Montrer que ϕ vérifie les hypothèses de la question 1.
   (b) Montrer que la distance δ est bornée.
   (c) Montrer que toute boule ouverte pour la distance d est aussi une boule ouverte pour la distance δ et que toute boule ouverte pour la distance δ de rayon strictement inférieur à 1 est aussi une boule ouverte pour la distance d.
   (d) Montrer que d et δ définissent la même topologie sur X.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique fini. Montrer que tous les singletons de X sont ouverts, et en déduire que la topologie définie par d est la topologie discrète.

Exercice 9. On rappelle que la « topologie cofinie » sur un ensemble X est la topologie pour laquelle les ouverts sont d'une part l'ensemble vide et d'autre part les parties de X dont le complémentaire est fini. Soit X un ensemble.

1. On suppose X fini, montrer que la topologie cofinie est égale à la topologie discrète.
2. On suppose X infini. Montrer que si U et V sont deux ouverts non vides pour la topologie cofinie, $U \cap V$ n'est pas vide non plus. En déduire qu'il n'existe pas de distance sur X qui définisse la topologie cofinie.

Exercice 10. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on définit $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$.
Vérifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}^n$ et décrire, pour chacune d'elles, les boules dans le cas $n = 2$.

Exercice 11.

1. Soit (X, d) un espace métrique, $r > 0$. Montrer que le diamètre de toute boule de rayon r dans X (ouverte ou fermée) est inférieur ou égal à $2r$.
2. Soit X un ensemble muni de la distance discrète. Quel est le diamètre de $B(x, \frac{1}{2})$ pour $x \in X$?
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension strictement positive. Calculer le diamètre des boules (fermées et ouvertes) de E en fonction de leur rayon.

Exercice 12.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 13. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que les boules ouvertes de E sont convexes. (On rappelle qu'on dit que C est convexe lorsque pour tous x, y de C et tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in C$).