Université Lyon 1

UNIVERSITE LYON 1

Année universitaire : 2023 / 2024

Diplôme : Licence Mathématiques

Epreuve : Topologie des espaces métriques

Date : 21 / 12 / 2023

NOTE : 11 / 11

Numéro à reporter sur les intercalaires : 0463841 Nombre d'intercalaires : 1

Première partie

Questions de cours :

1) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes d'intersection non vide.

Soit $f : \bigcup_{i\in I} C_i \longrightarrow \{0,1\}$ continue.

Soit $i \in I$, on prend $f_i = f|_{C_i} : C_i \longrightarrow \{0,1\}$ continue. Comme C_i est connexe, f_i est constante sur C_i. (f_i est la restriction de f à C_i)

On a donc $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions constantes.

Soit $x_0 \in \bigcap_{i\in I} C_i$, soit $i \in I$,

alors $\forall y \in C_i$, $f_i(y) = f_i(x_0) = f(x_0)$

cela est vrai $\forall i \in I$, donc

chaque f_i est une fonction constante égale à $f(x_0)$.

$$\boxed{\text{D'où } f \text{ est constante et donc } \bigcup_{i \in I} C_i \text{ est connexe}}$$

2). Soit X un espace métrique connexe par arcs.

Soit $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ continue.

Soient $x, y \in X$. $\exists\, \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Or f est continue, γ aussi donc

$f \circ \gamma\ [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$ est continue.

Comme $[0,1]$ est connexe (les connexes de $(\mathbb{R}, |.|)$ sont les intervalles), $f \circ \gamma$ est constante donc $f(x) = f(y)$.

Cela est vrai $\forall x, y \in X$.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est constante et } X \text{ connexe.}}$$

__Exercice :__

1) (a). Soient c_n, la suite définie par l'énoncé, $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $\psi(n+1) > \psi(n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$

- Soit $k \in \mathbb{N}$.
- Si $k = \psi(n+1)$ $|c_{\psi(n+1)}(k) - c_{\psi(n)}(k)| = |1 - (-1)| = 2$
- Si $k = \psi(n)$ $|c_{\psi(n+1)}(k) - c_{\psi(n)}(k)| = |-1 - 1| = 2$
- Sinon $|c_{\psi(n+1)}(k) - c_{\psi(n)}(k)| = |-1 + 1| = 0$.

D'où $\| c_{\psi(n+1)} - c_{\psi(n)} \|_\infty \geq 2$. $\forall n \in \mathbb{N}$

- Clairement, la suite $| c_{\psi(n+1)} - c_{\psi(n)} |$ est ~~borné~~ majorée par 2 donc $\| c_{\psi(n+1)} - c_{\psi(n)} \|_\infty \leq 2$

$$\boxed{\text{D'où } \| c_{\psi(n+1)} - c_{\psi(n)} \|_\infty = 2.}$$

Montrons que $(c_{\psi(n)})_{n \geq 0}$ est divergente.

Par l'absurde, si elle convergeait vers $l \in \mathbb{R}$, alors $\| c_{\psi(n+1)} - c_{\psi(n)} \|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} |l - l| = 0$

__absurde__ ! car $\| c_{\psi(n+1)} - c_{\psi(n)} \|_\infty = 2$.

$$\boxed{\text{D'où la suite } (c_{\psi(n)})_{n \geq 0} \text{ diverge}}$$

(b) . Clairement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n \in X_1$ (car $\forall k$, $|c_{\varphi_n}(k)| = 1$)

Par l'absurde, si X_1 était compact, on pourrait extraire une sous-suite convergente de $(c_n)_{n \geq 0}$. absurde par la question précédente

$$\boxed{\text{D'où } X_1 \text{ n'est pas compact}}$$

---

2) (a). La négation de $a(k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ est

$\exists \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists k > N$ tel que

$a(k) \geq \varepsilon$.

On pose donc $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n > 0$.

Pour $k = 0$, $\exists k_0 \geq k$ tel que $a(k_0) \geq \frac{1}{n}$.

On pose donc $\varphi(0) = \min\{k_0 \geq k \mid a(k_0) \geq \frac{1}{n}\}$

pour $k = \varphi(0)$, $\exists k_1 > k$ tel que $a(k_1) \geq \frac{1}{n}$

On pose donc $\varphi(1) = \min\{k_1 > k_0 \mid a(k_1) \geq \frac{1}{n}\}$

Par définition $\varphi(1) > \varphi(0)$.

On construit ainsi une suite par récurrence telle que $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi(k+1) > \varphi(k)$.

et $a(\varphi(k+1)) \geq \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{D'où l'existence d'une telle application } \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante et } n \in \mathbb{N}}$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 0463841

(b) · Soit $x \in l^\infty$. Par la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{1}{a(\varphi(k))} \right| \leq M.$$

De plus, $x \in l^\infty$ donc $x \circ \varphi \in l^\infty$ et on a donc.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |x \circ \varphi(k)| = |x(\varphi(k))| \leq \|x\|_\infty.$$

D'où $\forall k \in \mathbb{N}$ $\left| \frac{x(\varphi(k))}{a(\varphi(k))} \right| \leq M \|x\|_\infty.$

D'où $|U(x)|$ est majorée donc U est bornée et a fortiori, $\boxed{U \in l^\infty}$

Montrons maintenant que est linéaire.
Soient $x, y \in l^\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$U(\lambda x + y) = \frac{\lambda x(\varphi(k)) + y(\varphi(k))}{a(\varphi(k))}$$

$$= \lambda \frac{x(\varphi(k))}{a(\varphi(k))} + \frac{y(\varphi(k))}{a(\varphi(k))}$$

$$= \lambda U(x) + U(y).$$

$\boxed{\text{D'où } U \text{ est linéaire, de } l^\infty \text{ dans } l^\infty}$

(c). Soit $x \in X_a$, soit $k \in \mathbb{N}$.
Alors $|U(x)(k)| = \frac{|x \varphi(k)|}{|a \varphi(k)|} \underset{x \in X_a}{=} \frac{|a \varphi(k)|}{|a \varphi(k)|} = 1$

$\boxed{\text{D'où } U(x) \in X_1 \text{ donc } U(X_a) \subset X_1}$

Réciproquement, soit $y \in X_1$. On peut trouver x une suite de X_1 telle que $x\varphi(k) = y(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
(Il suffit de prendre $x(n) = 1$ lorsque qu'il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k) = n$)

Posons $z(a) = \alpha(a)\, x(a) \quad \forall a \in A$.

alors $|z(a)| = |\alpha(a)| \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha(a) \in \mathbb{R}_+^*}}{=} \alpha(a) \quad \forall a \in A$.

Donc $z \in X_\alpha$ et $[U(z)](a) = \dfrac{z(a)}{\alpha(a)} = x(a) = y(a)$
$\forall a \in A$

D'où $X_1 \subset U(X_\alpha)$

$$\boxed{\text{Par double inclusion } U(X_\alpha) = X_1}$$

(d) Par la question (b), <u>U est linéaire</u> et $\forall x \in \ell^\infty$

$$\underline{\|U(x)\|_\infty \leq M \|x\|_\infty}$$

Cela est équivalent à dire que $\underline{U}$ est <u>continue.</u>

Or si X_α était compact, $U(X_\alpha)$ le serait donc X_1 serait compact, Absurde ! par 1 (b)

$$\boxed{\text{D'où } X_\alpha \text{ n'est pas compact.}}$$

Université Lyon 1

UNIVERSITE LYON 1

Année universitaire : 2023 / 2024.

Diplôme : Licence Mathématiques

Epreuve : Topologie des espaces métriques

Date : 21/12/2023

NOTE : ~~2,5~~ 4 + 2,5 = 9 /10

Numéro à reporter sur les intercalaires : 0619829

Nombre d'intercalaires : 2

Seconde partie.

Problème.

Bloc A

1/ Procédons par récurrence.

On note $HR(k)$: " $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \gamma^k \|x_1 - x_0\|$ " pour $k \in \mathbb{N}$.

$HR(0)$ est vraie $\|x_1 - x_0\| \leq \gamma^0 \|x_1 - x_0\|$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $HR(k)$ et montrons $HR(k+1)$.

$$\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \underset{\text{énoncé}}{\leq} \gamma \|x_{k+1} - x_k\| \underset{HR(k)}{\leq} \gamma \gamma^k \|x_1 - x_0\|$$

D'où $\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \leq \gamma^{k+1} \|x_1 - x_0\|$

Ce qui conclue l'hérédité

$$\boxed{\text{D'où } \forall k \in \mathbb{N} \quad \|x_{k+1} - x_k\| \leq \gamma^k \|x_1 - x_0\|}$$

2) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n > m$

Par l'inégalité triangulaire.

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\| \underset{Q1}{\leq} \|x_1 - x_0\| \left(\sum_{k=m}^{n-1} \gamma^k\right)$$

De plus $(1-\gamma)\left(\sum_{k=m}^{n-1} \gamma^k\right) = \sum_{k=m}^{n-1} \left(\gamma^k - \gamma^{k+1}\right)$

$$= \gamma^m - \gamma^n \leq \gamma^m$$

NB $0 \leq \gamma < 1$ donc $\gamma^m > \gamma^n$

D'où $\sum_{k=m}^{n-1} \gamma^k \leq \frac{\gamma^m}{1-\gamma}$.

$$\boxed{\text{ce qui prouve l'inégalité de l'énoncé}}$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 0679829

3) Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application Γ-contractante, où $\Gamma < 1$

On cherche à montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, $k < 1$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \leq k \| y - x\|^2$$

Pour cela, considérons l'identité donnée par l'énoncé.
Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$.

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle = \frac{1}{2}\left[\| f(y) - f(x) + y - x\|^2 - \| f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2\right]$$

expliquer

$$\leq \frac{1}{2}\left[\|f(y) - f(x)\|^2 + \|y - x\|^2 + 2\|f(y) - f(x)\| \times \|y - x\| - \|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 \right]$$

$$\underset{f \text{ contraction}}{\leq} 2 \times \frac{1}{2} \times \Gamma \|y - x\|^2 = \Gamma \|y - x\|^2$$

D'où $k < 1$ tel que

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \leq k \|y - x\|^2.$$

Donc f vérifie les conditions du bloc B

3). Comme $0 < \gamma < 1$, $\frac{\gamma^n}{1-\gamma} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\forall \varepsilon > 0$ on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N$. $\frac{\gamma^m}{1-\gamma} \leq \frac{\varepsilon}{\|x_1 - x_0\|}$ (*)

(*) On suppose ici que $x_1 \neq x_0$. Si $x_1 = x_0$ alors $\forall n$ $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \gamma^n \|x_1 - x_0\| = 0$
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante donc convergente

D'où $\forall n, n \geq N$. $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$.
(inégalité vraie si $n = m$)

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

Montrons ensuite que $\mathbb{R}^d$ est complet.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ une suite de Cauchy.
On choisit la base canonique, et on peut noter $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Soit $\varepsilon > 0$, on prend N tel que $\forall n, m \geq N$, $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Or $\|x_n - x_m\| = \left(\sum_{i=1}^{d} (x_{i,n} - x_{i,m})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$

Donc $\forall i$ $|x_{i,n} - x_{i,m}| \leq \varepsilon$. On a une suite de Cauchy qui converge dans $\mathbb{R}$ (complet). Donc chaque $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, $\mathbb{R}^d$ est complet

$\boxed{\text{D'où } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$

OK.

Bloc B :

1). Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ deux points fixes de f.

alors $\langle f(x) - f(y), x - y \rangle = \|y - x\|^2 \leq k \|y - x\|^2$

Si $\|y - x\|^2 \neq 0$, alors on aurait $k \geqslant 1$ absurde car $k < 1$ donc $\|y - x\|^2 = 0$

donc, comme $\|.\|$ est une norme

$$\boxed{x = y.}$$

2). Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^d$ alors en passant à la limite (on note $x = \lim_{n \to \infty} x_n$)

$$x = (1 - \alpha) x + \alpha f(x).$$

$$\boxed{\text{Donc. } x = f(x)}$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 0619829

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 = \|(1-\alpha)(x_n - x_{n-1}) + \alpha(f(x_n) - f(x_{n-1}))\|^2$$

$$\underset{\text{identité}}{=} \|(1-\alpha)(x_n - x_{n-1})\|^2 + \|\alpha(f(x_n) - f(x_{n-1}))\|^2$$

$$+ 2\langle (1-\alpha)(x_n - x_{n-1}), \alpha(f(x_n) - f(x_{n-1}))\rangle$$

Or $\|\alpha(f(x_n) - f(x_{n-1}))\|^2 = \alpha^2 \|f(x_n) - f(x_{n-1})\|^2$

$$\underset{f\ \Pi\ \text{contractante}}{\leq} \alpha^2 \Pi^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

et $2\langle (1-\alpha)(x_n - x_{n-1}), \alpha(f(x_n) - f(x_{n-1}))\rangle$

$$= 2(1-\alpha)\alpha \langle x_n - x_{n-1}, f(x_n) - f(x_{n-1})\rangle$$

$$\underset{\text{propriété de } f}{\leq} 2(1-\alpha)\alpha \ell \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

D'où $\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq [(1-\alpha)^2 + \Pi^2\alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha)\ell]\|x_n - x_{n-1}\|^2$

$$\boxed{\text{Donc } \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq C(\alpha)\|x_n - x_{n-1}\|^2}$$

Bloc C :

1) $\dfrac{d}{d\alpha} C(\alpha) = \Pi^2 2\alpha + 2(1-\alpha)(-1)$
$+ 2(1-\alpha)\ell + 2\alpha(-1)\ell$

$\cancel{= \Pi^2 2\alpha - 2 + 2\alpha + 2\ell - 2\alpha\ell}$
$\cancel{- 2\alpha\ell}$

$$\boxed{\text{D'où } C'(\alpha) = 2\Pi^2\alpha + 2(1-\alpha)\ell - 2(1-\alpha+\alpha\ell)}$$

On a $c(0) = 1$, $c'(0) = 2(k-1) < 0$.

Clairement, c est continue (car polynomiale)

De plus, la dérivée de c est continue et est négative strictement en 0, donc, sur un voisinage V_1 de 0, c' est négative donc c est strictement décroissante. Donc ~~on peut trouver~~

$\forall \alpha_1 \in V_1 \setminus \{0\}$, $c(\alpha) < 1$. Comme c est continue et $c(0) > 0$, dans un voisinage V_2 de 0, ~~on peut trouver~~ $\forall \alpha_2 \in V_2 \setminus \{0\}$, $c(\alpha_2) > 0$. On prend l'intersection des voisinages $V = V_1 \cap V_2 \cap]0;1]$ et on peut trouver $\alpha \in V$ tel que

$$\boxed{c(\alpha) \in]0,1[.}$$

2). Supposons que f vérifie les conditions du bloc B.

On définit alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme dans le bloc B, qui vérifie $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \sqrt{c(\alpha)}\, \|x_n - x_{n-1}\|$ et $\sqrt{c(\alpha)} \in]0,1[$.

Par le bloc A, x_n converge et donc converge vers un point fixe de f. Par le bloc A, celui-ci est unique

$$\boxed{\text{D'où } f \text{ possède un unique point fixe.}}$$