Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques générales

Topologie des espaces métriques. Examen de session 1. Durée 2h. Décembre 2023

Première partie : à composer sur la copie N.1 (seconde partie au verso)

Questions de cours.

1. Démontrer que, dans un espace métrique, si $(C_i)_{i\in\mathcal{I}}$ est une famille de parties connexes et $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} C_i$ n'est pas vide, alors $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} C_i$ est connexe.
2. Démontrer que tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

Exercice Dans cet exercice, les suites sont toutes indexées par $\mathbf{N}$, les suites de réels étant notées comme des fonctions : une suite de réels est notée x et non $(x_k)_{k\geq 0}$, le réel qui est sa valeur en l'entier k étant noté $x(k)$ et non x_k. On rappelle que ℓ^∞ désigne l'espace vectoriel des suites bornées de réels. Il est normé par la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|x\|_\infty = \mathrm{Sup}_{k\geq 0}|x(k)|$. Tous les sous-ensembles de ℓ^∞ qui seront introduits sont munis de la distance induite par celle associée à la norme $\|.\|_\infty$.

On note
$$X_1 = \{x \in \ell^\infty \mid \forall k \in \mathbf{N},\ |x(k)| = 1\}.$$

1. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on note c_n la suite définie comme suit : pour tout $k \geq 0$ on pose $c_n(k) = 1$ si $k = n$ et $c_n(k) = -1$ sinon.
   (a) Soit $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une application strictement croissante. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, déterminer la valeur de $\|c_{\psi(n+1)} - c_{\psi(n)}\|_\infty$, et en déduire que la suite $(c_{\psi(n)})_{n\geq 0}$ est une suite divergente.
   (b) Montrer que X_1 n'est pas compact.
2. Soit $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^{+*}$ une suite bornée de réels strictement positifs telle que $a(k) \not\to 0$ quand $k \to +\infty$. On note
$$X_a = \{x \in \ell^\infty \mid \forall k \in \mathbf{N},\ |x(k)| = a(k)\}$$
   (a) Justifier l'existence d'une application strictement croissante $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et d'un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \geq 0$
$$\frac{1}{M} \leq a(\varphi(k)).$$
   Dans la suite, φ désigne une telle application. Pour $x \in \ell^\infty$ on définit une suite $U(x)$ en posant pour chaque $k \geq 0$:
$$[U(x)](k) = \frac{x(\varphi(k))}{a(\varphi(k))}.$$
   (b) Montrer que la suite $U(x)$ appartient à ℓ^∞ puis que U est une application linéaire continue de ℓ^∞ dans ℓ^∞.
   (c) Montrer que $U(X_a) = X_1$.
   (d) En déduire que X_a n'est pas compact.

Seconde partie : à composer sur la copie N.2 (première partie au recto)

Problème [1]. Dans ce problème, les blocs A et B sont indépendants. Le bloc C repose sur les résultats des blocs A et B. Pour $x, y \in \mathbf{R}^d$, où $d \in \mathbf{N}^*$, on note $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ le produit scalaire de x et y et $\|x\| = (\sum_{i=1}^d x_i^2)^{1/2}$ la norme euclidienne de x. On rappelle l'identité, utile dans B3,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.$$

Bloc A Soit $0 \leq \gamma < 1$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\mathbf{R}^d$, telle que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq \gamma \|x_n - x_{n-1}\|.$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\|x_{k+1} - x_k\| \leq \gamma^k \|x_1 - x_0\|$.
2. Montrer que, pour tout $n, m \in \mathbf{N}$, avec $n > m$, on a

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_1 - x_0\| \Big(\sum_{k=m}^{n-1} \gamma^k\Big) \leq \|x_1 - x_0\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma}.$$

3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}^d$.

Bloc B Soit $M > 0$ et $f \colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une application M-lipschitzienne.
On suppose que

$$\exists k \in \mathbf{R},\ k < 1 \quad \text{tel que} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^d, \qquad \langle f(y) - f(x), y - x\rangle \leq k\|y - x\|^2.$$

1. Démontrer que si $x, y \in \mathbf{R}^d$ sont deux points fixes de f dans $\mathbf{R}^d$, alors $x = y$.
2. Pour $x_0 \in \mathbf{R}^d$, on construit la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence :

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \alpha f(x_n), \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

   où $\alpha \in]0, 1]$ est un paramètre que l'on choisira après. Démontrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}^d$, alors la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un point fixe de f.
3. Démontrer que, pout tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq C(\alpha)\|x_n - x_{n-1}\|^2,$$

   où

$$C(\alpha) = (1-\alpha)^2 + M^2\alpha^2 + 2\alpha(1-\alpha)k. \qquad (*)$$

Bloc C

1. Soit $M > 0$ et $k < 1$. On définit $C(\alpha)$ par la formule $(*)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$. Dériver la fonction $\alpha \mapsto C(\alpha)$ et calculer $C(0)$ et $C'(0)$. En déduire qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que $0 \leq C(\alpha) < 1$.
2. Conclure que si f vérifie les conditions du bloc B, alors f possède un et un seul point fixe dans $\mathbf{R}^d$.
3. Démontrer que, si $f \colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est une application contractante, alors f vérifie les conditions du bloc B.

1. Communiqué par F. Lagoutière.