
Corrigé du contrôle Terminal
6 janvier 2023 - Durée : 2h

Question de cours.

Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$, $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d).
Soit $y \in B(x, r)$; posons $\rho = r - d(x, y) > 0$. Soit $z \in B(y, \rho)$; on a alors

$$d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) < \rho + d(y, x) = r$$

Donc $d(z, x) < r$, autrement dit $z \in B(x, r)$: on vient de prouver que pour tout $y \in B(x, r)$ il existe $\rho > 0$ tel que $B(y, \rho) \subset B(x, r)$, par conséquent $B(x, r)$ est ouvert dans (X, d).

Exercice 1. *Dans cet exercice, on munit $\boldsymbol{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle, et on considère la partie $A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.*
Répondre aux questions suivantes par Vrai ou Faux, en justifiant soigneusement votre réponse.

1. *A est compact.*
   Vrai. Comme $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, il nous suffit de montrer que A est à la fois fermé et borné; par définition de A on a $\|a\|_2^2 \leqslant 2$ pour tout $a \in A$, autrement dit $\|a\|_2 \leqslant \sqrt{2}$ pour tout $a \in A$ donc A est borné dans $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

   De plus, $f : (x, y) \mapsto \|(x, y)\|_2^2 = x^2 + y^2$ est une fonction continue de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, $A = f^{-1}([1, 2])$ et $[1, 2]$ est fermé dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. Par conséquent A est fermé dans $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

2. *A est convexe.*
   Faux. En effet $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ appartiennent tous les deux à A, mais leur milieu $(0, 0)$ n'appartient pas à A.

3. *A est connexe par arcs.*
   Indication: on pourra utiliser le fait que tout élément de A s'écrit sous la forme $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ avec $r \in [1, \sqrt{2}]$ et $\theta \in \boldsymbol{R}$.
   Vrai. Fixons $a = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in A$ et $a' = (r' \cos(\theta'), r' \sin(\theta')) \in A$, avec $1 \leqslant r, r' \leqslant \sqrt{2}$ et $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$. Pour $t \in [0, 1]$, posons

   $$r(t) = (1 - t)r + tr' \ , \quad \theta(t) = (1 - t)\theta + t\theta'$$

   Comme $[1, \sqrt{2}]$ est un intervalle, et est par conséquent convexe, $r(t) \in [1, \sqrt{2}]$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si l'on note $\varphi : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ la fonction définie par

   $$\varphi(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$$

   on a donc que $\varphi(t) \in A$ pour tout $t \in [0, 1]$. De plus φ est continue, $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = a'$: il existe un chemin continu à valeurs dans A reliant a et a'. Comme ceci est vrai pour tout $a, a' \in A$, on a prouvé que A est connexe par arcs.

Exercice 2.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On note :

- *$B = B_f(0, 1)$ la boule unité fermée de E : $B = \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$;*
- *$L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans E;*

- $F = \left\{ u \in L(E) \colon \overline{u(B)} \text{ est compact dans } (E, \|\cdot\|) \right\}$.

1. **Question de cours.** *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f \colon X \to Y$. On suppose que X est compact et f est continue. Montrer que $f(X)$ est un compact de (Y, d_Y).*

   Soit $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $f(X)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, fixons $x_n \in X$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de (X, d_X), qui est compact; on peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers $x \in X$. Comme f est continue, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(x) \in f(X)$. On vient de prouver que $f(X)$ est un compact de (Y, d_Y).

2. *Dans cette question seulement, on suppose que E est de dimension finie.*

   (a) *Soit $u \in L(E)$. Montrer que $u(B)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|)$.*
   Comme E est un espace vectoriel normé de dimension finie, et u est linéaire, on sait par un résultat du cours que u est continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(E, \|\cdot\|)$. De plus, B est compact puisque E est de dimension finie. Le résultat de la question précédente nous assure donc que $u(B)$ est compact dans E.

   (b) *En déduire que $F = L(E)$.*
   On a $F \subset L(E)$ par définition. Pour voir la réciproque, fixons $u \in L(E)$; d'après la question précédente, $u(B)$ est compact dans $(E, \|\cdot\|)$. Par conséquent $u(B)$ est fermé, et $\overline{u(B)} = u(B)$ est compact dans E. Donc $u \in F$, ce qui montre que $L(E) \subset F$, et finalement $L(E) = F$.

3. *Soit $u \in F$.*

   (a) *Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in B$, $\|u(x)\| \leqslant M$.*
   Puisque $\overline{u(B)}$ est compact, on sait que $\overline{u(B)}$ est borné, et il en va de même de $u(B)$. Par conséquent, il existe $M \geqslant 0$ tel que $u(B) \subset B_f(0, M)$, autrement dit $\|u(x)\| \leqslant M$ pour tout $x \in B$.

   (b) *En déduire que u est continue.*
   D'après un résultat du cours, si u est linéaire, et $\|u(x)\| \leqslant M$ pour tout $x \in B_f(0,1)$, alors u est continue et $|||u||| \leqslant M$. Il nous suffit d'appliquer ce résultat pour conclure. On pourrait aussi utiliser une autre caractérisation de la continuité d'une application linéaire : soit $x \in E \backslash \{0\}$; comme $\|u(y)\| \leqslant M$ pour tout $y \in B$ on a

   $$\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leqslant M$$

   donc $\|u(x)\| \leqslant M\|x\|$. Ceci est aussi vrai pour $x = 0$, et on conclut en utilisant la linéarité de u que u est continue.

4. (a) *Soit A et B deux parties compactes de $(E, \|\cdot\|)$. Montrer que $A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|)$.*
   Soit $(u_n)_{n \in N}$ une suite d'éléments de $A + B$; on peut trouver deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}} \in B^{\mathbf{N}}$ telles que $u_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Puisque A est compact, il existe $\varphi_1 \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et telle que $(a_{\varphi_1(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $a \in A$; et puisque $(b_{\varphi_1(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de B, qui est compact, on peut en extraire une sous-suite $(b_{\varphi_1(\varphi_2(n))})_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers $b \in B$. Posons $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, qui est strictement croissante; la suite $(a_{\psi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers a puisque c'est une suite extraite d'une suite qui converge vers a. Finalement, $u_{\psi(n)} = a_{\psi(n)} + b_{\psi(n)}$ converge vers $a + b \in A + B$, et on a montré que $A + B$ est compact.

   Remarque. On aurait pu utiliser la compacité de $A \times B$ dans $E \times E$ et la continuité de l'application $(a, b) \mapsto a + b$ de $E \times E$ dans E, ainsi que le résultat de la première question de l'exercice pour montrer le résultat plus rapidement.

   (b) *Soit $u \in F$, $v \in F$. Montrer que $u + v \in F$.*
   Par hypothèse, $\overline{u(B)}$ et $\overline{v(B)}$ sont compacts.
   De plus, pour tout $x \in B$, $(u + v)(x) = u(x) + v(x) \in u(B) + v(B)$, on en déduit que $(u + v)(B) \subset u(B) + v(B)$.

Mais, $u(B) \subset \overline{u(B)}$ et $v(B) \subset \overline{v(B)}$, d'où $(u+v)(B) \subset \overline{u(B)} + \overline{v(B)}$. Or, d'après la question précédente, $\overline{u(B)} + \overline{v(B)}$ est compact, donc en particulier fermé, par conséquent, $\overline{(u+v)(B)} \subset \overline{u(B)} + \overline{v(B)}$.
Ainsi $\overline{(u+v)(B)}$ est une partie fermée incluse dans un compact, d'où $\overline{(u+v)(B)}$ est compacte ce qui montre que $u+v \in F$.

Exercice 3. *On note $E = C([0,1], \boldsymbol{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $([0,1], |\cdot|)$ dans $(\boldsymbol{R}, |\cdot|)$. On rappelle que pour $f \in E$ on a $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.*
On rappelle aussi que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E et que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
On note $F = \left\{ f \in E : f \text{ est de classe } C^1 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de E et que si $f \in F$ alors $f' \in E$. Pour tout $f \in F$, on pose $\|f\| = \|f'\|_\infty$.

1. (a) *Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur F.*
Soit $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.
   - On a bien $\|0_F\| = 0$; réciproquement si $\|f\| = 0$ alors $\|f'\|_\infty = 0$ donc $f' = 0_E$ puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme. Donc f est constante sur $[0,1]$; et puisque $\int_0^1 f(t)dt = 0$ on conclut que f est la fonction nulle. On vient de vérifier la propriété de séparation.
   - Puisque $(\lambda f)' = \lambda f'$ et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, on obtient

$$\|\lambda f\| = \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| \, \|f'\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|$$

   Ceci établit la propriété d'homogénéité.
   - Comme $(f+g)' = f' + g'$, on déduit de l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_\infty$ que

$$\|f+g\| = \|f' + g'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\| + \|g\|$$

   L'inégalité triangulaire est ainsi démontrée.

(b) *Montrer que pour tout $f \in F$, il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = 0$.*
Soit $f \in F$. Si f est la fonction nulle, alors elle s'annule en tout $a \in [0,1]$. Sinon, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) \neq 0$; si f ne change pas de signe, alors $\int_0^1 f(t)dt \neq 0$ puisque f est continue, non nulle, de signe constant sur $[0,1]$. Par conséquent, il existe $y \in [0,1]$ tel que $f(y)$ soit de signe opposé à celui de $f(x)$, et le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = 0$.

(c) *Montrer que pour tout $f \in F$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.*
Soit $f \in F$; fixons $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = 0$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| \leqslant |x-a| \sup\{|f'(t)| : t \in [0,1]\} = |x-a| \|f\| \leqslant \|f\|$$

Donc $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.
Remarque. On pouvait aussi utiliser le théorème fondamental de l'analyse et écrire, pour tout $x \in [0,1]$:

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t)dt \right| \leqslant \left| \int_a^x |f'(t)|dt \right| \leqslant \left| \int_a^x \|f\| dt \right| \leqslant \|f\| \, |a-x| \leqslant \|f\|$$

(d) *Montrer que $(F, \|\cdot\|)$ est complet.*
Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|)$. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $\|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n, m \geqslant N$. On a alors, pour tout $n, m \geqslant N$, l'inégalité

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \|f_n - f_m\| \leqslant \varepsilon$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, qui est complet: $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f \in E$.

Par définition de $\|\cdot\|$, la suite $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ est aussi de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, et converge donc uniformément vers $g \in E$. D'après le théorème de dérivation des suites de fonctions, on a f est de classe C^1 et $g = f'$.

Puisque $[0,1]$ est un segment sur lequel la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f, on peut échanger limite et intégrale pour obtenir

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0$$

Donc $f \in F$, et $\|f_n - f\| = \|f_n' - g\|_\infty$ tend vers 0: la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente dans $(F, \|\cdot\|)$. On a ainsi démontré que $(F, \|\cdot\|)$ est complet.

2. *Pour $f \in F$, on définit une fonction $T(f)\colon [0,1] \to \boldsymbol{R}$ en posant, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$,*

$$T(f)(x) = f(x) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

(a) *Montrer que pour tout $f \in F$ on a $T(f) \in F$.*

Soit $f \in F$; notons $g = T(f)$, qui est de classe C^1 car $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$ et f est de classe C^1 sur $[0,1]$. De plus, en utilisant les changements de variables affines $u = \dfrac{t}{2}$ et $v = \dfrac{t+1}{2}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(t)dt &= \int_0^1 f(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(\frac{t+1}{2}\right)dt \\
&= 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} f(u)du + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(v)dv \\
&= \int_0^1 f(t)dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

On obtient comme attendu que $T(f)$ appartient à F.

(b) *On admet que $T\colon F \to F$, $f \mapsto T(f)$ est une application linéaire.*
Montrer que T est continue de $(F, \|\cdot\|)$ dans $(F, \|\cdot\|)$ et que $|||T||| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Soit $f \in F$; notons de nouveau $g = T(f)$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$g'(x) = f'(x) + \frac{1}{4} f'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

L'inégalité triangulaire nous permet d'obtenir, pour tout $x \in [0,1]$, la majoration

$$|g'(x)| \leqslant \|f'\|_\infty + \frac{1}{4}\|f'\|_\infty + \frac{1}{4}\|f'\|_\infty = \frac{3}{2}\|f'\|_\infty = \frac{3}{2}\|f\|$$

On en conclut que $\|T(f)\| = \|g'\|_\infty \leqslant \dfrac{3}{2}\|f\|$; ceci est vrai pour tout f, et comme T est linéaire on a établi que T est continue de $(F, \|\cdot\|)$ dans $(F, \|\cdot\|)$ et $|||T||| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

(c) *Soit $g \in F$, montrer qu'il existe un unique $f \in F$ tel que $T(f) = g$.*
Indication : on pourra utiliser l'application $F \to F$, $f \mapsto f - T(f) + g$.

Considérons l'application $\varphi\colon f \mapsto f - T(f) + g$, définie sur F; notons que l'on a $T(f) = g$ si, et seulement si, $\varphi(f) = f$. On doit donc prouver que φ admet un unique point fixe sur F.

On a bien φ à valeurs dans F, et comme $(F, \|\cdot\|)$ est complet, nous pouvons appliquer le théorème du point fixe de Picard, et il nous suffit pour conclure de prouver que φ est contractante.

Pour cela, fixons $f_1, f_2 \in F$ et notons $h = T(f_1) - T(f_2)$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$h(x) = \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} f_2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} f_2\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

En utilisant les mêmes calculs qu'à la question précédente, on obtient que

$$\|h\| = \|h'\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|f_1' - f_2'\|_\infty = \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|$$

On a obtenu l'inégalité $\|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|$, donc φ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne et par conséquent contractante. D'après le théorème du point fixe, il existe un unique $f \in F$ tel que $\varphi(f) = f$, autrement dit il existe un unique $f \in F$ tel que $T(f) = g$.

Exercice 4. *Dans cet exercice, on fixe un espace métrique (X, d) connexe par arcs et une bijection continue $f\colon (X, d) \to (\boldsymbol{R}, |\cdot|)$.*

1. *Soit $a, b \in \boldsymbol{R}$ et $x, y \in X$ tels que $f(x) = a$, $f(y) = b$. On fixe un chemin continu $\gamma\colon [0,1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.*

   (a) *Montrer que $[a, b] \subseteq f \circ \gamma([0,1])$.*
   La fonction $f \circ \gamma$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$, donc le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que $f \circ \gamma([0,1])$ est un intervalle. Cet intervalle contient $f(\gamma(0)) = f(x) = a$, ainsi que $f(\gamma(1)) = f(y) = b$. Donc cet intervalle contient $[a, b]$ tout entier; autrement dit $[a, b] \subseteq f \circ \gamma([0,1])$.

   (b) *Montrer que $f^{-1}([a, b])$ est compact.*
   Puisque f est continue et $[a, b]$ fermé dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, $f^{-1}([a, b])$ est fermé dans (X, d). Soit $x \in f^{-1}([a, b])$; $f(x) \in [a, b]$ donc, d'après le résultat de la question précédente, il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(x) = f(\gamma(t))$. Puisque f est injective, on a donc $x = \gamma(t)$; on vient de montrer que $f^{-1}([a, b]) \subseteq \gamma([0,1])$.
   Comme γ est continue et $[0,1]$ est compact, $\gamma([0,1])$ est compact. Finalement, $f^{-1}([a, b])$ est un fermé contenu dans le compact $[0,1]$; donc $f^{-1}([a, b])$ est compact.

2. *Prouver que pour tout fermé F de (X, d), $f(F)$ est fermé dans $(\boldsymbol{R}, |\cdot|)$.*
   Soit F un fermé de (X, d) et $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $f(F)$ qui converge vers $t \in \mathbf{R}$. Comme $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, cette suite est bornée, par conséquent il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que $t_n \in [-M, M]$ pour tout n. Choisissons pour tout $n \in \mathbf{N}$ un $x_n \in F$ tel que $f(x_n) = t_n$; la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans $f^{-1}([-M, M])$, qui est compact. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers $x \in X$.

   Comme F est fermé, $x \in F$; et comme f est continue, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to+\infty} t_{\varphi(n)} = t$. Donc $t \in f(F)$, qui est par conséquent fermé.

Remarque. À l'aide du résultat de la question précédente, on conclut que f^{-1} est continue, donc que f est un homéomorphisme. On a en effet établi que pour tout fermé F de (X, d) $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est fermé, et la caractérisation de la continuité via les images réciproques de fermés nous donne la continuité de f^{-1}.

Une application du résultat qu'on vient de démontrer: soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dont le graphe Γ_f est connexe par arcs. Soit π_1 la projection sur la première coordonnée, et π_2 la projection sur la deuxième coordonnée. Pour tout $u \in \Gamma_f$, il existe un unique $x \in \mathbf{R}$ tel que $u = (x, f(x))$, et $\pi_1(u) = x$, $\pi_2(u) = f(x)$. La fonction π_1 est une bijection continue de Γ_f sur $\mathbf{R}$; comme Γ_f est connexe par arcs, π_1^{-1} est continue. Or, $\pi_1^{-1}(x) = (x, f(x))$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Finalement, $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue.