Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2022-2023**

L3 - Mathématiques générales et applications — UE : Topologie des espaces métriques

---

Contrôle Terminal

6 janvier 2023 - Durée : 2h

Les documents, téléphones portables, calculatrices, objets connectés, etc. sont interdits.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Lors de la correction, la plus grande attention sera portée à la qualité de la rédaction.

Question de cours.

Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$, $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d).

Exercice 1. Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle, et on considère la partie $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.
Répondre aux questions suivantes par Vrai ou Faux, en justifiant soigneusement votre réponse.

1. A est compact.
2. A est convexe.
3. A est connexe par arcs.
   Indication: on pourra utiliser le fait que tout élément de A s'écrit sous la forme $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r \in [1, \sqrt{2}]$ et $\theta \in \boldsymbol{R}$.

Exercice 2.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On note :

- $B = B_f(0, 1)$ la boule unité fermée de E : $B = \{x \in E \colon \|x\| \leqslant 1\}$;
- $L(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans E;
- $F = \left\{u \in L(E) \colon \overline{u(B)} \text{ est compact dans } (E, \|\cdot\|)\right\}$.

1. **Question de cours.** Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f \colon X \to Y$. On suppose que X est compact et f est continue. Montrer que $f(X)$ est un compact de (Y, d_Y).
2. Dans cette question seulement, on suppose que E est de dimension finie.
   (a) Soit $u \in L(E)$. Montrer que $u(B)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|)$.
   (b) En déduire que $F = L(E)$.
3. Soit $u \in F$.
   (a) Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in B$, $\|u(x)\| \leqslant M$.
   (b) En déduire que u est continue.
4. (a) Soit A et B deux parties compactes de $(E, \|\cdot\|)$. Montrer que $A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|)$.
   (b) Soit $u \in F$, $v \in F$. Montrer que $u + v \in F$.

Exercice 3. On note $E = C([0,1], \mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $([0,1], |\cdot|)$ dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$. On rappelle que pour $f \in E$ on a $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$.
On rappelle aussi que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E et que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
On note $F = \left\{ f \in E : f \text{ est de classe } C^1 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de E et que si $f \in F$ alors $f' \in E$. Pour tout $f \in F$, on pose $\|f\| = \|f'\|_\infty$.

1. (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur F.
   (b) Montrer que pour tout $f \in F$, il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $f \in F$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.
   (d) Montrer que $(F, \|\cdot\|)$ est complet.

2. Pour $f \in F$, on définit une fonction $T(f) : [0,1] \to \mathbf{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T(f)(x) = f(x) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

   (a) Montrer que pour tout $f \in F$ on a $T(f) \in F$.
   (b) On admet que $T : F \to F$, $f \mapsto T(f)$ est une application linéaire.
   Montrer que T est continue de $(F, \|\cdot\|)$ dans $(F, \|\cdot\|)$ et que $|||T||| \leqslant \frac{3}{2}$.
   (c) Soit $g \in F$, montrer qu'il existe un unique $f \in F$ tel que $T(f) = g$.
   Indication : on pourra utiliser l'application $F \to F$, $f \mapsto f - T(f) + g$.

Exercice 4. Dans cet exercice, on fixe un espace métrique (X, d) connexe par arcs et une bijection continue $f : (X, d) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$.

1. Soit $a, b \in \mathbf{R}$ et $x, y \in X$ tels que $f(x) = a$, $f(y) = b$. Soit $\gamma : ([0,1], |\cdot|) \to (X, d)$ un chemin continu tel que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.
   (a) Montrer que $[a, b] \subseteq f \circ \gamma([0,1])$.
   (b) Montrer que $f^{-1}([a, b])$ est compact.

2. Montrer que pour tout fermé F de (X, d), $f(F)$ est fermé dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.