

Feuille d'exercices n° 3
Continuité

Exercice 1. L'intervalle $[0, 1]$ étant muni de sa distance usuelle, l'application $x \mapsto x^2$ est-elle lipschitzienne ? Et l'application $y \mapsto \sqrt{y}$?

Exercice 2. On munit \mathbf{R} de la distance usuelle. Soit f une application dérivable de \mathbf{R} vers \mathbf{R} . Montrer que f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée.

Exercice 3. On a vu (exercice 7 de la fiche 1) que sur \mathbf{R} , l'application $\delta : (x, y) \mapsto \frac{|y - x|}{1 + |y - x|}$ est une distance, qui définit la même topologie que la distance usuelle d . Ces deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ? Sont-elles Lipschitz-équivalentes ?

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X . On note χ_A la fonction caractéristique de A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que χ_A soit continue.
2. Déterminer l'ensemble des points où χ_A est continue.
3. On munit \mathbf{R} de la distance usuelle. Que peut-on dire de $\chi_{\mathbf{Q}}$?

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de E et f une application continue de X vers \mathbf{R} . Montrer que $\sup_A f = \sup_{\overline{A}} f$.

Exercice 6. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$. Montrer que f est continue sur X si et seulement si pour toute partie A de X , on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 7. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et f une application de X vers Y . Montrer que si f est continue, alors son graphe (c'est-à-dire $\{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$) est fermé dans l'espace métrique $X \times Y$. Donner un exemple qui montre que l'implication réciproque n'est pas toujours vraie.

Exercice 8. Soit a_1, \dots, a_n des réels, et soit $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ la forme linéaire définie par $\varphi(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. On munit \mathbf{R} de la norme valeur absolue.

Montrer que φ est continue pour chacune des trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ et déterminer dans chacun des trois cas sa norme subordonnée.

Exercice 9. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers \mathbf{R} , qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On munit \mathbf{R} de la norme valeur absolue.

Pour toute $u \in E$, on pose $\Psi(u) = \int_0^{1/2} u(t) dt - \int_{1/2}^1 u(t) dt$.

1. Montrer que Ψ est une forme linéaire continue sur E avec $\|\Psi\| \leq 1$.
2. Pour chaque $n \geq 3$, on note u_n la fonction continue qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$, vaut -1 sur l'intervalle $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ et est affine sur l'intervalle $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$.
En calculant (ou minorant) les $|\Psi(u_n)|$, montrer que $\|\Psi\| = 1$.

Exercice 10.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers \mathbf{R} . On munit \mathbf{R} de la norme valeur absolue. On considère sur E la forme linéaire φ définie par $\varphi(f) = f(0)$.

Montrer que selon qu'on munisse E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou de la norme $\|\cdot\|_1$, la forme linéaire φ est continue ou discontinue.

Exercice 11.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers \mathbf{R} , qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_1$.

Pour toute $f \in E$ et tout x de $[0, 1]$ on pose $(\mu(f))(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Montrer que μ est une application linéaire de E dans E , puis que μ est continue avec $\|\mu\| \leq 1$.
2. Pour chaque $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$. Utiliser les fonctions f_n pour déterminer la norme de μ .

Exercice 12. On considère $F = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}, n \mapsto x(n).$$

On munit F de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|$.

Pour toute x dans F et tout n entier naturel, on pose $(\Delta(x))(n) = x(n+1) - x(n)$.

Montrer que Δ définit une application linéaire de F dans lui-même, puis montrer que Δ est continue et expliciter sa norme.

Exercice 13. L'application $t \mapsto \arctan t$ de \mathbf{R} vers \mathbf{R} est-elle uniformément continue? Et l'application $\theta \mapsto \tan \theta$ de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers \mathbf{R} ? Et l'application $s \mapsto \sqrt{s}$ de \mathbf{R}^+ vers \mathbf{R} ?

Exercice 14. Dans cet exercice et le suivant, les intervalles de \mathbf{R} sont munis de la métrique usuelle et les parties de \mathbf{C} de la métrique induite par la métrique usuelle sur \mathbf{C} .

Donner un exemple d'homéomorphisme entre :

1. Les intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$, où a, b, c et d sont quatre réels qui vérifient $a < b$ et $c < d$.
2. L'intervalle $] -1, 1[$ et \mathbf{R} .
3. L'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ et le quart de cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.
4. L'ensemble \mathbf{R} et le cercle épointé $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1, z \neq -1\}$. (La formule $f(t) = \frac{1+it}{1-it}$ est suggérée).

Exercice 15. Montrer que l'application définie par $f(\theta) = e^{i\theta}$ est une bijection continue de $[0, 2\pi[$ sur le cercle $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ mais n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 16. Soit X un ensemble et soit d_1 et d_2 deux distances sur X . Montrer que les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité est un homéomorphisme entre (X, d_1) et (X, d_2) .

Exercice 17. On munit \mathbf{R}^2 de la distance euclidienne usuelle, puis on définit φ de \mathbf{R}^2 vers \mathbf{R}^2 par :

$$\varphi(u) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } u = (0, 0) \\ \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_2} u & \text{si } u \neq (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que φ est bijective en exhibant son inverse.
2. Montrer que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur \mathbf{R}^2 . En déduire que $u \mapsto \|u\|_\infty$ est continue puis que φ et φ^{-1} sont continues en tout point de $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Montrer que φ et φ^{-1} sont continues en $(0, 0)$.
4. Utiliser φ pour montrer que le carré $\{u \in \mathbf{R}^2 \mid \|u\|_\infty \leq 1\}$ et le disque $\{u \in \mathbf{R}^2 \mid \|u\|_2 \leq 1\}$ sont homéomorphes.