TP7 : arcs paramétrés et ellipses

Le but de ce TP est de définir les arcs paramétrés et d'établir certaines de leurs propriétés (notamment concernant ses tangentes). On illustrera notre propos par l'exemple des ellipses.

1. Arcs paramétrés.

Définition. On appelle *arc paramétré* ou *courbe paramétrée*, de classe $\mathcal{C}^k$ tout couple (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ (c'est-à-dire que f est k-fois dérivable et sa dérivée k-ème est continue). L'ensemble $f(I) = \{f(t) \mid t \in I\}$ est appelé *support* (ou *image*) de l'arc (I, f). On note parfois $M(t)$ la position du point $f(t)$.

Exemple. L'application $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est un arc paramétré $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

Définition. Soient (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et $t_0 \in I$. L'arc (I, f) admet une *tangente* au point $M(t_0)$ si la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ admet une position limite quand t tend vers t_0, c'est-à-dire si l'on peut en trouver, au voisinage de t_0, un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(t)$ possèdant une limite non nulle lorsque t tend vers t_0. La droite passant par $M(t_0)$ est dirigée par ce vecteur limite est appelée *tangente* en $M(t_0)$ à l'arc paramétré (I, f).

Remarque. Cette définition impose que $M(t) \neq M(t_0)$ pour tout $t \neq t_0$ au voisinage de t_0. En pratique, cette condition sera toujours vérifiée.

1. Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ et écrivons $f(t) = (x(t), y(t))$. Soit $t_0 \in I$ tel que $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$. Montrez que l'arc (I, f) possède une tangente en $M_0 = f(t_0)$ qui est dirigée par le vecteur $f'(t_0)$.
2. Sur Geogebra, créez trois curseurs a, b et s (a et b sont compris entre 1 et 5 et s est entre 0 et $2 *$ pi). Tracez l'arc paramétré $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$ (pour cela, écrivez simplement dans la fenêtre *Algèbre* $(a * \cos(t), b * \sin(t))$). Une telle courbe est appelée *ellipse*.

   Définissez aussi le point $M = (a \cos s, b \sin s)$.
3. Déterminez $f'(s)$ puis en déduire une équation de la tangente en $f(s)$. Tracez sur Geogebra la droite d'équation $M + t * f'(s)$. Animez le curseur s pour faire bouger M. Que constate-t-on ?
4. A partir des coordonnées de $f'(s)$, déterminez un vecteur normal à $f'(s)$ (c'est-à-dire orthogonal à $f'(s)$). En déduire une équation de la droite perpendiculaire à la tangente en $M(s)$ passant par $M(s)$. La tracer sur Geogebra.
5. Supposons qu'un arc paramétré (I, f) admette une équation cartésienne de la forme $F(x, y) = 0$ (avec $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$, typiquement une fonction polynomiale). On note $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction gradient de F définie par

   $$\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

   Soit $t_0 \in I$ tel que $f'(t_0) \neq (0, 0)$. On note $M_0 = f(t_0)$ et on suppose aussi que $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, F(M_0) \neq (0, 0)$. Montrez que la normale à la tangente en M_0 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, F(M_0)$.

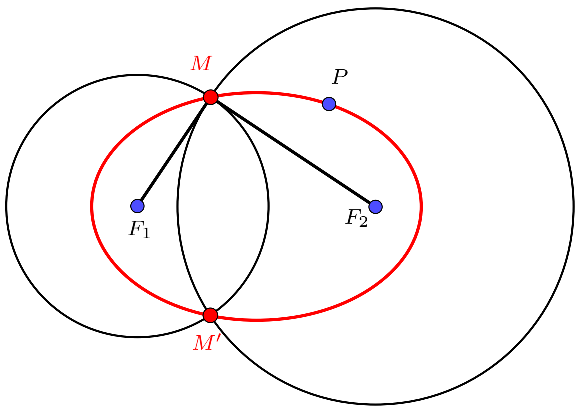
   Indication. Ecrivons $f(t) = (x(t), y(t))$ (pour $t \in I$). Alors on a $F(x(t), y(t)) = 0$. Dérivez cette expression.

6. Montrez que l'ellipse paramétrée par $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$ a pour équation cartésienne
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
En posant $F(x,y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1$, calculez $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, F$. Que peut-on dire de $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, F(f(t))$ et $f'(t)$?

1. Ellipses (définition bifocale).

Méthode du jardinier pour construire une ellipse. Considérons F_1, F_2, P trois points non-alignés du plan. On note a le réel tel que $F_1P + F_2P = 2a$. L'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F_1 et F_2 passant par P est l'ensemble des points M du plan vérifiant
$$F_1M + F_2M = 2a.$$
On peut la construire sur Geogebra de la manière suivante.

- Placez F_1, F_2, P.
- Dans la fenêtre Algèbre, définissez $a = (F_1P + F_2P)/2$ et $c = F_1F_2/2$.
- Introduisez un curseur p variant entre $a - c$ et $a + c$.
- Placez les points M et M', intersection du cercle de centre F_1 et de rayon p avec le cercle de centre F_2 et de rayon $2a - p$.
- Affichez les traces de M et M' et animez le paramètre p.



On note O le milieu du segment $[F_1F_2]$. Dans un repère affine adapté centré en O, les points F_1 et F_2 ont pour coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ respectivement. Soit $M = (x, y)$ un point du plan. On définit
$$\Omega(M) = (2a + r + r')(2a - r - r')(2a + r - r')(2a + r' - r), \quad \text{où } r = F_1M \text{ et } r' = F_2M.$$

1. Montrez que $r + r' \geq 2c$ et $|r - r'| \leq 2c$.
2. En utilisant le fait que $c < a$, montrez que $\Omega(M) = 0 \Leftrightarrow r + r' = 2a$ ($\Leftrightarrow M \in \mathcal{E}$).
3. En développant $\Omega(M)$, un petit calcul montre que
$$\begin{aligned}\Omega(M) = (4a^2 - (r + r')^2)(4a^2 - (r - r')^2) &= (4a^2 - r^2 - r'^2)^2 - 4r^2r'^2 \\ &= 16a^2(a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2}\right).\end{aligned}$$
En posant $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, déduire de ce qui précède que l'ellipse $\mathcal{E}$ ci-dessus a pour équation cartésienne
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$