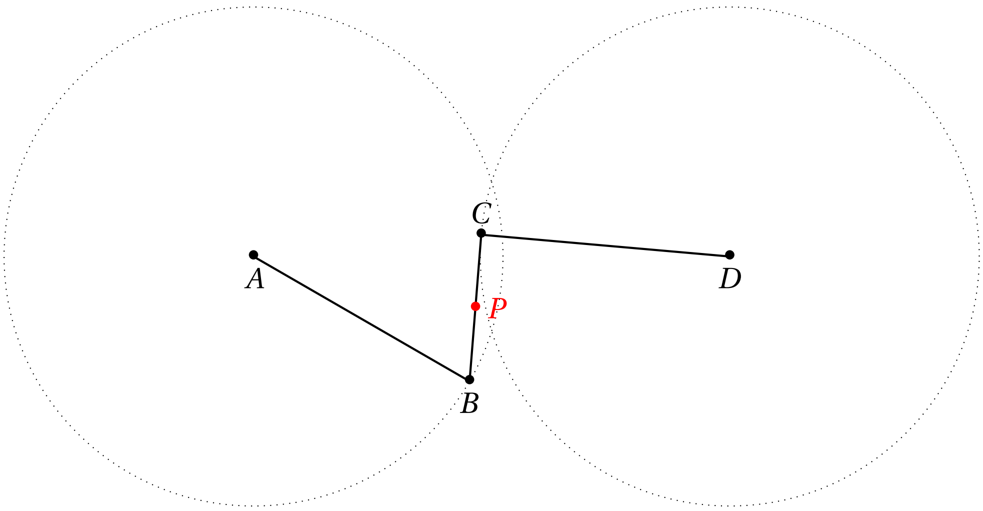
# SÉANCE 5. MÉCANISMES PLANS

*Un compas et une règle sont des instruments de nature profondément différentes : alors que le premier permet de tracer avec exactitude un cercle de rayon donné, la seconde ne fournit qu'un* guide *pour tracer un segment; le résultat n'est rectiligne que si le bord de la règle l'est. Pour dire les choses autrement, l'analogue d'une règle pour tracer un cercle serait un disque matériel (par exemple une pièce de monnaie), dont on suivrait le contour, plutôt qu'un compas. Cela amène naturellement à se poser une question :* quel pourrait être l'analogue d'un compas pour tracer un segment?

*Cette question a été soulevée par des ingénieurs à partir de la fin du XVIIIe siècle, qui ont cherché des mécanismes simples permettant de convertir un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.*

**Exercice 1 (Les courbes de Watt)** — En cherchant à améliorer les premières machines à vapeur, James WATT découvrit en 1784 un mécanisme articulé simple permettant de transformer un mouvement circulaire en un mouvement *approximativement* rectiligne.

Le mécanisme de Watt est constitué de trois tiges rigides articulées : deux tiges $AB$ et $CD$ de longeur $a$, et une tige $BC$ de longueur $2b$. Les points $A$ et $D$ sont fixes, à une distance $2c$ l'un de l'autre. On s'intéresse à la trajectoire du milieu $P$ de $[BC]$ lorsque $B$ décrit un arc du cercle de centre $A$ et de rayon $a$.




La figure ci-dessus a été faite avec $a = 3,3$ cm, $b = 0,9$ cm et $c = 3,15$ cm.

1. Sur *Geogebra* :
   (i) Réaliser la figure précédente.
   (ii) Animer le point $B$ est observer la trajectoire du point $P$.
   (iii) Déterminer le plus grand arc du cercle $\mathscr{C}(A,a)$ sur lequel peut se trouver $B$ afin que l'on puisse construire le mécanisme de Watt.

On observe que la courbe décrite par $P$ semble contenir une portion *à peu près* rectiligne.

2. Par construction, $C$ appartient aux cercles $\mathscr{C}(B,2b)$ et $\mathscr{C}(D,a)$. Notons $C'$ leur second point d'intersection. Construire le milieu $P'$ de $[BC']$ et tracer également la trajectoire de $P'$.

En travaillant un peu plus, on peut démontrer que la courbe $\mathscr{W}$ tracée par les points $P$ et $P'$ peut être définie par une équation cartésienne de la forme $P(x, y) = 0$, où $P(X, Y)$ est un polynôme de la forme

$$P(X, Y) = X^6 + Y^6 + \big(\text{monômes de degré total} \leqslant 5\big).$$

3. Démontrer que $\mathscr{W}$ ne contient aucun segment de droite de longueur strictement positive.

   *Indication : considérer une droite $\mathscr{D}$ du plan décrite sous forme paramétrée et déterminer tous les points de $\mathscr{D} \cap \mathscr{W}$.*

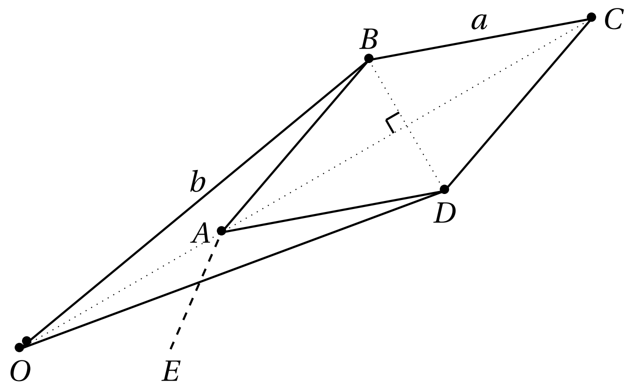
4. Reprendre les questions 1 et 2 en commençant par introduire trois curseurs $a, b$ et $c$, prenant des valeurs entre 0 et 4, puis en construisant le mécanisme de Watt de paramètres $a, b$ et $c$ à partir d'un point $A$ du plan choisi arbitrairement. Explorer les différentes courbes obtenues comme trajectoires des points $P$ et $P'$.

   On pourra en particulier considérer les valeurs suivantes du triplet $(a; b; c)$ :

$$(1;1;1,5),\quad (1;1;1,1),\quad (1,2;2;1,6),\quad (2,6;2;1,6) \text{ et } (2,2;2;2)$$

**Exercice 2 (L'inverseur de Peaucellier)** — En 1864, Charles PEAUCELLIER décrivit un mécanisme articulé permettant de transformer de façon *exacte* un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

L'*inverseur de Peaucellier* est un mécanisme articulé reproduisant la configuration ci-dessous. Il est constitué de six tiges rigides articulées : deux tiges de longueur $b$ et de quatre tiges longueur $a$. On ajoute souvent une septième tige $EA$ permettant au point $A$ de parcourir un cercle de centre $E$.




$$OB = OD = b \text{ et } AB = BC = CD = AD = a.$$

*Deux rappels de géométrie du triangle* — Considérons un triangle non plat $ABC$.

(i) (Loi des sinus)

$$\frac{\sin(\widehat{A})}{BC} = \frac{\sin(\widehat{B})}{AC} = \frac{\sin(\widehat{C})}{AB}$$

(ii) (Triangles semblables) Soit $A'B'C'$ un autre triangle tel que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ et $\widehat{A'} = \widehat{A}$. Les triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont *semblables*, c'est-à-dire :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \text{ et } \widehat{B'} = \widehat{B} \text{ et } \widehat{C'} = \widehat{C}.$$

1. Considérons la figure suivante ci-dessus. Démontrer l'égalité :

$$OA \cdot OC = b^2 - a^2.$$

*Indication : introduire le milieu $I$ de $[AC]$ et appliquer deux fois le théorème de Pythagore.*

2. Passons sur *Geogebra*.

   (i) Tracer la figure précédente, avec $a = 4$ et $b = 6$.

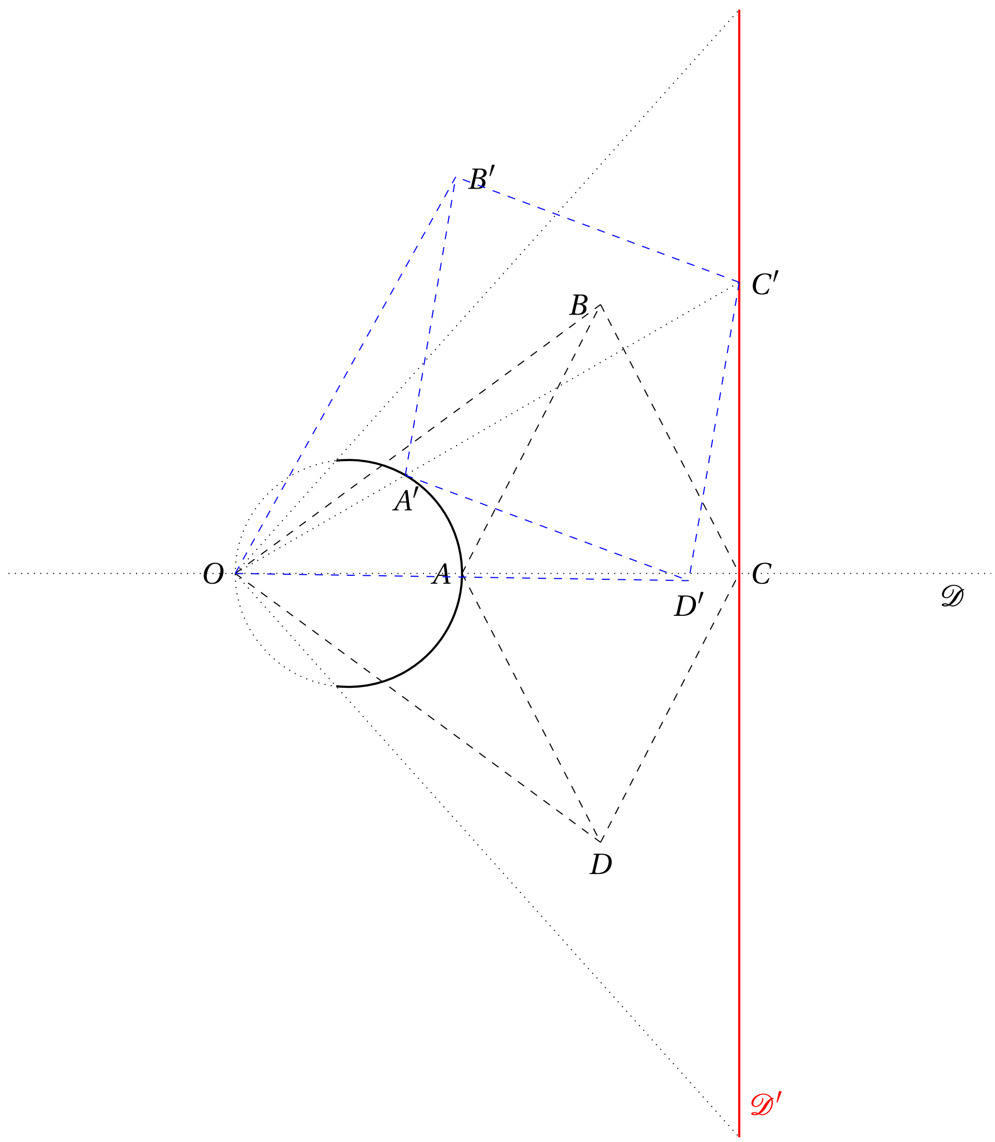
   *Indication : on commencera par placer les points $O$ et $A$ tels que $b - a < OA < b$, puis on construira $B$ et $D$ en intersectant des cercles bien choisis ; enfin, on définira $C$ comme l'image de $A$ par la réflexion d'axe $(BD)$.*

   (ii) Tracer ensuite un cercle $\mathscr{C}$ passant par $O$, de rayon $r$ tel que $b - a < r < b$, et lier le point $A$ à ce cercle.

   (iii) Afficher la trace du point $C$ et animer le point $A$. Qu'observe-t-on ?

   (iv) À quel arc du cercle $\mathscr{C}$ le point $A$ doit-il appartenir pour que le point $C$ soit bien défini ?

3. Nous allons maintenant *démontrer* que $C$ décrit un segment de droite lorsque $A$ décrit un arc du cercle $\mathscr{C}$.




D'après la question précédente, dans toutes les configurations de l'inverseur $OABCD$, le point $A$ appartient au segment $[OC]$ et

$$OA \cdot OC = b^2 - a^2.$$

Plaçons tout d'abord $A$ à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ reliant $O$ au centre du cercle $\mathscr{C}$ ; le point $C$ appartient alors à $\mathscr{D}$ puisque $O, A$ et $C$ sont alignés. On désigne par $\mathscr{D}'$ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par $C$.

(i) Considérons un point $A'$ du cercle $\mathscr{C}$ et soit $C'$ le point de la demi-droite $[OA)$ tel que $OA' \cdot OC' = b^2 - a^2$. En utilisant la question préliminaire, démontrer que triangles $OA'A$ et $OCC'$ sont semblables, puis en déduire que $C'$ appartient à la droite $\mathscr{D}'$.

(ii) Réciproquement, considérons un point $C'$ sur la droite $\mathscr{D}'$, et soit $A'$ le point de $[OC')$ tel que $OA' \cdot OC' = b^2 - a^2$. Démontrer que $A'$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

**Exercice 3 (Pour aller plus loin)** — Nous allons voir qu'un inverseur de Peaucellier permet également de tracer des arcs de cercles de rayon arbitrairement grand, ce qui est manifestement impossible avec un compas.

1. Sur *Geogebra*, examiner la trajectoire du point $C$ lorsque $A$ parcourt un cercle ne passant pas nécessairement par $O$. Quelle conjecture peut-on proposer ?

Munissons le plan d'un repère cartésien orthonormé d'origine $O$.

2. Calculer les coordonnées du point $C$ en fonction de celles du point $A$, et réciproquement.
3. Rappeler quelle est l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon $R$.
4. Déduire de ce qui précède que, si $A$ décrit un cercle $\mathscr{C}$ ne passant pas par $O$, alors $C$ décrit également un cercle $\mathscr{C}'$ ne passant pas par $O$. Vérifier également que le rayon de $\mathscr{C}'$ est
$$\frac{(b^2 - a^2)R}{|R^2 - (a^2 + b^2)|},$$
où $R$ est le rayon de $\mathscr{C}$ et $(a, b)$ son centre.
5. En déduire qu'un inverseur de Peaucellier permet de tracer des arcs de cercles de rayon arbitrairement grand.

*Remarque* — L'inverseur de Peaucellier réalise mécaniquement une transformation du plan appelée *inversion*. Étant donné un point $O$ dans $\mathscr{P}$ et un nombre réel $k > 0$, l'inversion de centre $O$ et de rapport $k$ est l'application de $\mathscr{P} \setminus \{O\}$ dans lui-même qui envoie un point $M$ sur le point $M'$ défini par
$$\overrightarrow{OM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{OM}.$$
Autrement dit, $M'$ est l'unique point de la demi-droite $[OM)$ tel que

$$OM' \cdot OM = k.$$

En vertu de la question 2 de l'exercice 2, l'inverseur de Peaucellier de paramètres $a$ et $b$ réalise l'inversion de centre $O$ et de rapport $k = b^2 - a^2$.

*Geogebra* sait construire l'image d'un point (et, même, d'une figure) par une inversion (outil dans la rubrique des transformations).