Séance 3. Droites et plans dans l'espace

Objectifs : raisonnements standards sur les droites et plans de l'espace, utilisation de coordonnées cartésiennes, utilisation de l'environnement 3D de Geogebra

Avertissement : pour éviter de tout perdre en cas de plantage de *Geogebra 3D*, pensez à enregistrer régulièrement votre travail.

Nous travaillons dans l'espace affine euclidien.

Exercice 1 (Cube et triangles) — On s'intéresse dans cet exercice aux différents triangles définis par trois sommets d'un cube.

1. Sur *Geogebra*, tracer un cube $ABCDEFGH$.
2. Déterminer tous les types de triangles (isocèles, rectangles, etc) pouvant être obtenus en choisissant trois sommets du cube.
3. Dans chaque cas, exprimer les longueurs des côtés en fonction de l'arête a du cube.
4. Combien y a-t-il de triangles de chaque type ?

Exercice 2 — Posons
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre dans $\mathbf{R}^3$ le système $AX = B$. Quel est la nature géométrique de l'ensemble $\mathscr{D}$ des solutions ?
2. Représenter $\mathscr{D}$ sur *Geogebra*.
3. Déterminer, par le calcul, l'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y - z - 1 = 0$, puis vérifier le résultat avec *Geogebra*.
4. Soit $M \in \mathbf{R}^3$ le point de coordonnées $(-3, 4, 2)$.
   (a) Démontrer qu'il existe une et une seule droite $\mathscr{D}'$ contenant M, qui soit (faiblement) parallèle au plan $\mathscr{P}$ et qui rencontre la droite $\mathscr{D}$.
   Indication : que peut-on dire de l'ensemble des droites (faiblement) parallèles à $\mathscr{P}$ qui passent par M ?
   (b) Donner une description paramétrique de $\mathscr{D}$, puis des équations cartésiennes la définissant.

Exercice 3 (Sections planes d'un cube) — On considère un cube $\mathscr{C} = ABCDEFGH$. Les sommets sont étiquetés de façon à ce que $[AE]$ soit une arête. Sur les figures réalisées avec *Geogebra*, il est important que les sommets du cube soient étiquetés de cette façon.

On s'intéresse dans cet exercice à différentes section de $\mathscr{C}$ par des plans.

1. On se donne trois points $M \in [CD]$, $N \in [AB]$ et $P \in [EF]$ (Noter que ces trois arêtes sont parallèles).
   (a) Sur *Geogebra*, dessiner l'intersection du cube $\mathscr{C}$ avec le plan (MNP).

(b) Visualiser la façon dont cette intersection se modifie lorsque les points M, N et P sont déplacés (sur les arêtes choisies).

(c) Quels types de polygones obtient-on ?

(d) Les points M et N étant fixés, comment peut-on caractériser les points P tels que le polygone obtenu soit un parallélogramme (resp. un carré) ?

2. Considérons maintenant un point I sur la diagonale $[AG]$ du cube $\mathscr{C}$ et désignons par $\mathscr{P}_I$ le plan perpendiculaire à (AG) passant par I.

   (a) Sur *Geogebra*, réaliser une animation montrant comment les sections $\mathscr{C} \cap \mathscr{P}_I$ varient lorsque I parcourt le segment $[AG]$. Pour visualiser le résultat de façon adéquate, on pourra choisir de représenter $\mathscr{P}_I$ dans la fenêtre graphique $2D$.

   (b) Décrire les types de polygones obtenus, ainsi que les moments auxquels les changements de type se produisent.

   (c) Quel polygone obtient-on lorsque I est le milieu de $[AG]$?

3. Placer un point J sur la face EFGH.

   (a) Sur *Geogebra*, réaliser une animation montrant les différentes sections du cube $\mathscr{C}$ par les plans perpendiculaires à la droite (AJ). Comme précédemment, on pourra représenter ces plans (variables) dans la fenêtre graphique $2D$.

   (b) Décrire les types de polygones obtenus, ainsi que les moments auxquels les changements de type se produisent.

4. Considérons finalement le dessin ci-dessous, représentant le cube $\mathscr{C}$ en perspective cavalière. On souhaite tracer la section de $\mathscr{C}$ avec le plan (MNP).

   (a) Justifier que les droites (MN) et (EF) (resp. (FG)) sont sécantes en un point R (resp. S). Dessiner ces points sur la figure.

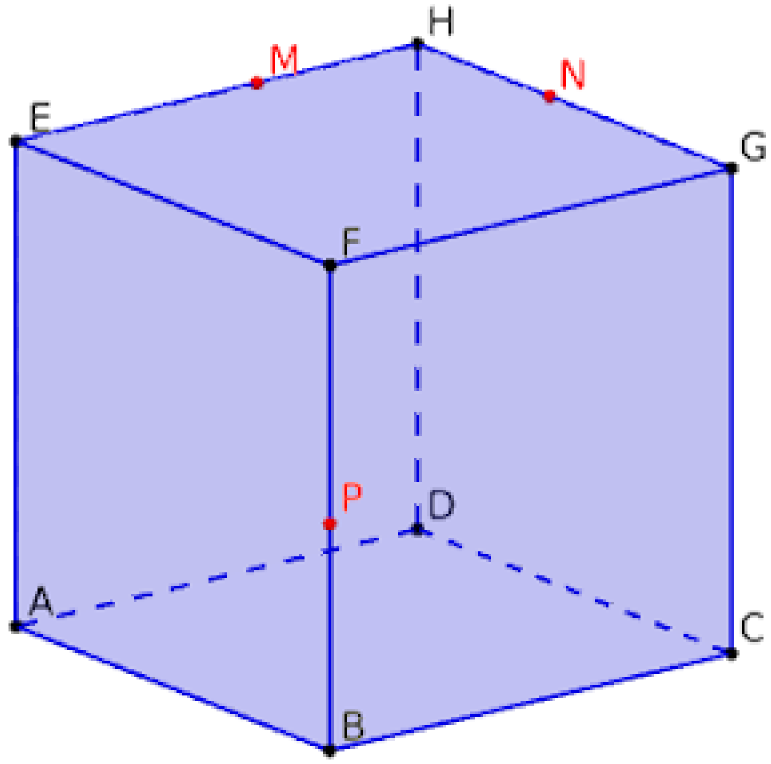
   (b) En utilisant R et S, décrire une construction de $\mathscr{C} \cap (MNP)$. Dessiner cette section sur la figure.

   (c) Dessiner l'intersection du plan (MNP) avec le plan (ABC).
   Indication : que peut-on dire du point d'intersection des droites (RP) et (AB) ?

Exercice 4 (Optimisation) — Une fourmi se trouve en un point du plafond d'une pièce parallélipédique. Elle veut atteindre, en suivant les murs, le plafond et le plancher, une miette de pain située sur le plancher. Déterminer le plus court chemin qu'elle peut emprunter.

Références

Les exercices 1 et 4 sont extraits du chapitre 8 du livre *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie* de Daniel Perrin, aux éditions Cassini. L'exercice 3 est très largement inspiré de la page *Sections planes d'un cube* de l'excellent site web *Descartes et les mathématiques* (www.debart.fr).


H
M
N
E
G
F
P
D
A
C
B