Séance 1. Autour du triangle

Objectifs : prendre en main Geogebra, *passer en revue certaines droites et certains points remarquables d'un triangle, utiliser des applications affines, étudier des lieux de points*

Nous travaillerons tout le temps dans un *plan affine euclidien* $\mathscr{P}$. Il est intéressant d'utiliser *Geogebra* pour la plupart des questions : faire une figure, réaliser une construction géométrique, rechercher une idée de démonstration, etc.

1. Médiatrices

Soit ABC un triangle non aplati. On désigne respectivement par A', B' et C' les milieux des côtés $[BC], [AC]$ et $[AB]$.

On rappelle que la *médiatrice* du segment $[AB]$ est par définition l'ensemble des points du plan qui sont équidistants de A et de B. Nous la noterons $m_{[AB]}$.

$$m_{[AB]} = \{M \in \mathscr{P} \mid MA = MB\}.$$

1. Démontrer que $m_{[AB]}$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu C' de $[AB]$.

   Indication : il s'agit ici de démontrer une égalité *entre deux ensembles de points. On pourra raisonner par double inclusion, en exploitant le théorème de Pythagore.*

2. Démontrer que les trois médiatrices (des côtés) du triangle ABC sont concourantes en un point O, équidistant des sommets A, B, C.

   Indication : la question précédente permet de penser aux médiatrices de deux points de vue différents. Lequel est le plus adapté pour répondre à cette question ?

3. Combien existe-t-il de cercles passant par trois points non alignés du plan ? Décrire une construction à la règle et au compas.

   Indication : on pourra raisonner par analyse-synthèse : 1) quelles caractéristiques doit posséder un tel cercle, puis 2) quels sont les cercles ayant ces propriétés ?

4. Sur *Geogebra*, créer un outil construisant le centre du cercle circonscrit à un triangle donné.

2. Applications affines

On renvoie au cours *Géométrie affine et euclidienne* pour la définition d'une application affine. Rappelons simplement qu'une application affine $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$:

(i) préserve l'alignement et le parallélisme ;

(ii) préserve les milieux ;

(iii) est déterminée de manière unique par la connaissance des images de trois points non alignés (un *repère affine*).

1. Si f est une *bijection affine*, démontrer qu'elle transforme une droite en une droite, et que l'image d'un repère affine est encore un repère affine.

2. Soit ABC un triangle non aplati dans le plan et soit D un point du plan n'appartenant pas à la droite (BC).

(a) Justifier qu'il existe une et une seule bijection affine f telle que $f(B) = B, f(C) = C$ et $f(A) = D$.

(b) Expliquer comment construire l'image de la droite $m_{[AB]}$ par f.

Indications : traiter d'abord le cas où $m_{[AB]}$ est parallèle à $[BC]$; si ce n'est pas le cas, raisonner en introduisant le point d'intersection des droites $m_{[AB]}$ et (BC).

3. Médianes

On considère toujours un triangle ABC non aplati. La *médiane* issue de A (resp. B, C) est par définition la droite (AA') (resp. (BB'), (CC')). Les questions suivantes expliquent comment le concours des médianes peut *se déduire* de celui des médiatrices.

1. À quelle(s) condition(s) sur le triangle ABC ses médianes et ses médiatrices sont-elles confondues ?

2. Décrire la construction d'un point D du plan tel que le triangle DBC soit équilatéral.

3. Soit f l'unique bijection affine telle que $f(B) = B, f(C) = C$ et $f(D) = A$. Démontrer que f transforme les médianes de DBC en les médianes de ABC.

4. Déduire de ce qui précède que les médianes de ABC sont concourantes en un point G, appelé *centre de gravité* du triangle.

5. Sur *Geogebra*, créer un outil construisant le centre de gravité d'un triangle.

4. Hauteurs

La *hauteur* issue de A est par définition la droite h_A perpendiculaire à (BC) passant par A. Les questions suivantes expliquent comment *déduire* le concours des hauteurs de celui des médiatrices.

1. À quelle(s) condition(s) sur le triangle ABC ses hauteurs et ses médiatrices sont-elles confondues ?

2. Peut-on reproduire le raisonnement de la question 1.2 (e) pour démontrer que les hauteurs de ABC sont concourantes ? À quelle difficulté se heurte-t-on ?

   Indication : si D est un point tel que le triangle DBC soit équilatéral et f désigne toujours l'unique bijection affine telle que $f(B) = B, f(C) = C$ et $f(D) = A$, peut-on garantir que f transforme h_D en h_A ? Utiliser Geogebra...

3. Changeons de stratégie et considérons le triangle $A'B'C'$.

   (a) Quelles sont ses hauteurs ? Sont-elles concourantes ?

   (b) Quelle bijection affine du plan permet de transformer le triangle $A'B'C'$ en le triangle ABC ?

   Indication : exprimer les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{C'A'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

   (c) En déduire une preuve du concours des hauteurs du triangle ABC en un point H, appelé *orthocentre* et vérifiant l'identité

$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}.$$

Remarque — En particulier, les trois points G, O et H sont toujours *alignés*. La droite qui les porte, bien définie si ABC n'est pas équilatéral, est la *droite d'Euler* du triangle.

4. Déduire également de ce qui précède l'égalité

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}.$$

Autrement dit, le point G est situé aux deux tiers de la médiane, du côté de A'.

5. Sur *Geogebra*, créer un outil construisant l'orthocentre d'un triangle.

5. Quelques problèmes de lieux géométriques

Considérons deux points distincts B, C dans le plan.

(5.1) Fixons un cercle $\mathscr{C}$ passant par B et C. Soit A un point de $\mathscr{C}$, distinct de B et C.

(a) Lorsque A parcourt $\mathscr{C} \setminus \{B, C\}$, quelle(s) courbe(s) le centre de gravité G du triangle ABC décrit-il ?

Indication : utiliser les outils dynamiques de Geogebra *pour vous faire une idée du résultat à démontrer, puis exploiter la question 4.4.*

(b) Même question pour l'orthocentre H de ABC.

(5.2) Fixons maintenant une droite d, parallèle à (BC) et distincte de celle-ci. Soit A un point de d.

(a) Lorsque A parcourt d, quelle(s) courbe(s) le centre de gravité G de ABC décrit-il ?

(b) Même question pour l'orthocentre H de ABC.
Ici, après s'être fait une idée de la réponse sur Geogebra*, on pourra introduire un repère affine adapté et essayer d' obtenir un paramétrage de la courbe recherchée.*

6. Bissectrices (pour continuer...)

Considérons toujours un triangle ABC non aplati.

(6.1) La *bissectrice intérieure* de l'angle $\widehat{BAC}$ est par définition l'unique droite Δ_A telle que la réflexion d'axe Δ échange les deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

(a) Que peut-on dire de Δ_A lorsque le triangle ABC est isocèle en A ?

(b) Dans le cas général, décrire une méthode de construction de Δ_A à la règle et au compas.

(c) Démontrer que tout point de Δ_A est équidistant des deux droites (AB) et (AC).

(d) Que penser de l'assertion réciproque ?

(6.2) La *bissectrice extérieure* de l'angle $\widehat{BAC}$ est la perpendiculaire Δ'_A à Δ_A passant par A.

(a) Démontrer que $\Delta_A \cup \Delta'_A$ est précisément l'ensemble des points du plans qui sont équidistants des droites (AB) et (AC).

(b) Démontrer que les trois bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en un point I, intérieur au triangle et équidistant de ses trois côtés. Autrement dit, les projetés orthogonaux de I sur les trois côtés de ABC sont situés sur un même cercle, le *cercle inscrit* du triangle ABC.

(c) Sur *Geogebra*, créer un outil construisant le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC.

(d) Parmi les six bissectrices intérieures ou extérieures du triangle ABC, quelles autres droites sont-elles concourantes ? Quels nouveaux cercles peut-on associer à ABC ?