L3 Mathématiques pour l'enseignement — Géométrie et arithmétique avec des logiciels
Université Lyon 1

PROJET I : PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

On travaille dans l'espace $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La *sphère* unité Σ, formée des points à distance 1 de l'origine O, est caractérisée par l'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2=1$. On pose $N=(0,0,1)$ (pôle nord) et $S=(0,0,-1)$ (pôle sud).

Soit Π le plan d'équation $z=-1$. La *projection stéréographique* est l'application

$$\pi : \Sigma \setminus \{N\} \to \Pi$$

qui associe à un point P de Σ distinct de N le point d'intersection de la droite (NP) et du plan Π.

On admettra que l'intersection de Σ et d'un plan $\mathscr{P}$, si elle est non vide, est un *cercle* dans $\mathscr{P}$. Lorsque $\mathscr{P}$ passe par l'origine O, on parle de *grand cercle*. L'objectif de ce projet est de représenter la projection stéréographique sur *Geogebra* et de démontrer qu'elle transforme les cercles en des cercles ou des droites.

Les sections prioritaires sont 1, 3 et 4. On pourra admettre les résultats de la section 2 dans un premier temps.

1. La projection stéréographique en coordonnées

1. Illustrer la projection stéréographique sur *Geogebra*.
2. Justifier que l'application π est bien définie (lorsque $P \in \Sigma \setminus \{N\}$, pourquoi la droite (NP) intersecte-t-elle Π ?).
3. Exprimer les coordonnées du point $\pi(P)$ en fonction de celles du point P.
(*Il est judicieux d'utiliser un paramétrage de la droite* (NP)...).
4. Quelle est l'image par π d'un *parallèle*, c'est-à-dire un cercle obtenu en intersectant Σ avec un plan perpendiculaire à l'axe (NS) ?
5. Quelle est l'image par π d'un *méridien*, c'est-à-dire un cercle obtenu en intersectant Σ avec un plan contenant la droite (NS) ?
6. Sur *Geogebra*, tracer l'image par π de plusieurs cercles $\Sigma \cap \mathscr{P}$ (où $\mathscr{P}$) désigne un plan. Qu'observe-t-on si $\mathscr{P}$ contient le point N ?

2. Questions préliminaires en 2D

Pour cette section, le cadre de travail est un plan affine euclidien. On note $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$ le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1. Considérons la figure ci-dessous (Figure 1). Les angles en B et en B' sont égaux.

   (i) Démontrer que les triangles ABC et $AB'C'$ sont semblables.

   (ii) En déduire l'égalité

   $$\left\langle \overrightarrow{MB} | \overrightarrow{MC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MB'} | \overrightarrow{MC'} \right\rangle.$$

   (*Démontrer d'abord l'égalité* $MB \cdot MC = MB' \cdot MC'$, *puis déterminer les signes des produits scalaires.*)

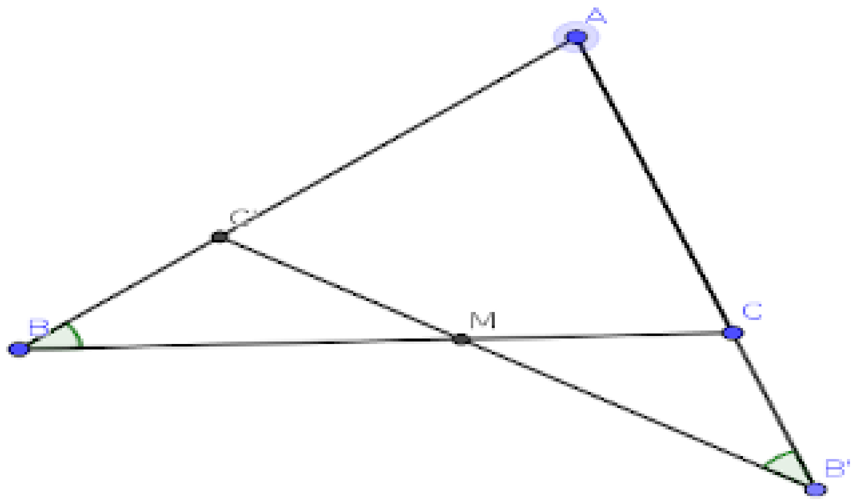


Figure 1

Considérons maintenant un cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$. Notre objectif ici est d'établir la caractérisation suivante du cercle $\mathscr{C}$: *il s'agit précisément de l'ensemble des points P du plan dont le projeté orthogonal P' sur (AB) est tel que*

$$\left\langle \overrightarrow{P'A} | \overrightarrow{P'B} \right\rangle = -PP'^2.$$

2. Étant donné un point P de $\mathscr{C}$, notons P' son projeté orthogonal sur (AB).
   (i) Démontrer que les triangles $AP'P$ et $PP'B$ sont semblables.
   (ii) En déduire l'égalité
   $$\left\langle \overrightarrow{P'A} | \overrightarrow{P'B} \right\rangle = -PP'^2.$$
   (*Déduire d'abord l'égalité $PP'^2 = P'A \cdot P'B$ entre longueurs de la question précédente, puis examiner la position des points A, P' et B.*)
3. Considérons maintenant un point P du plan (non nécessairement sur $\mathscr{C}$) et notons P' son projeté orthogonal sur (AB). On suppose que l'égalité
   $$\left\langle \overrightarrow{P'A} | \overrightarrow{P'B} \right\rangle = -PP'^2$$
   est vérifiée.
   (i) Démontrer que P' appartient nécessairement au segment $[AB]$.
   (ii) Notons Q l'un des deux points d'intersection de la droite (PP') et du cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que l'on a $\overrightarrow{P'P} = \pm\overrightarrow{P'Q}$, puis en déduire que P appartient au cercle $\mathscr{C}$.

3. Cercles en 3D

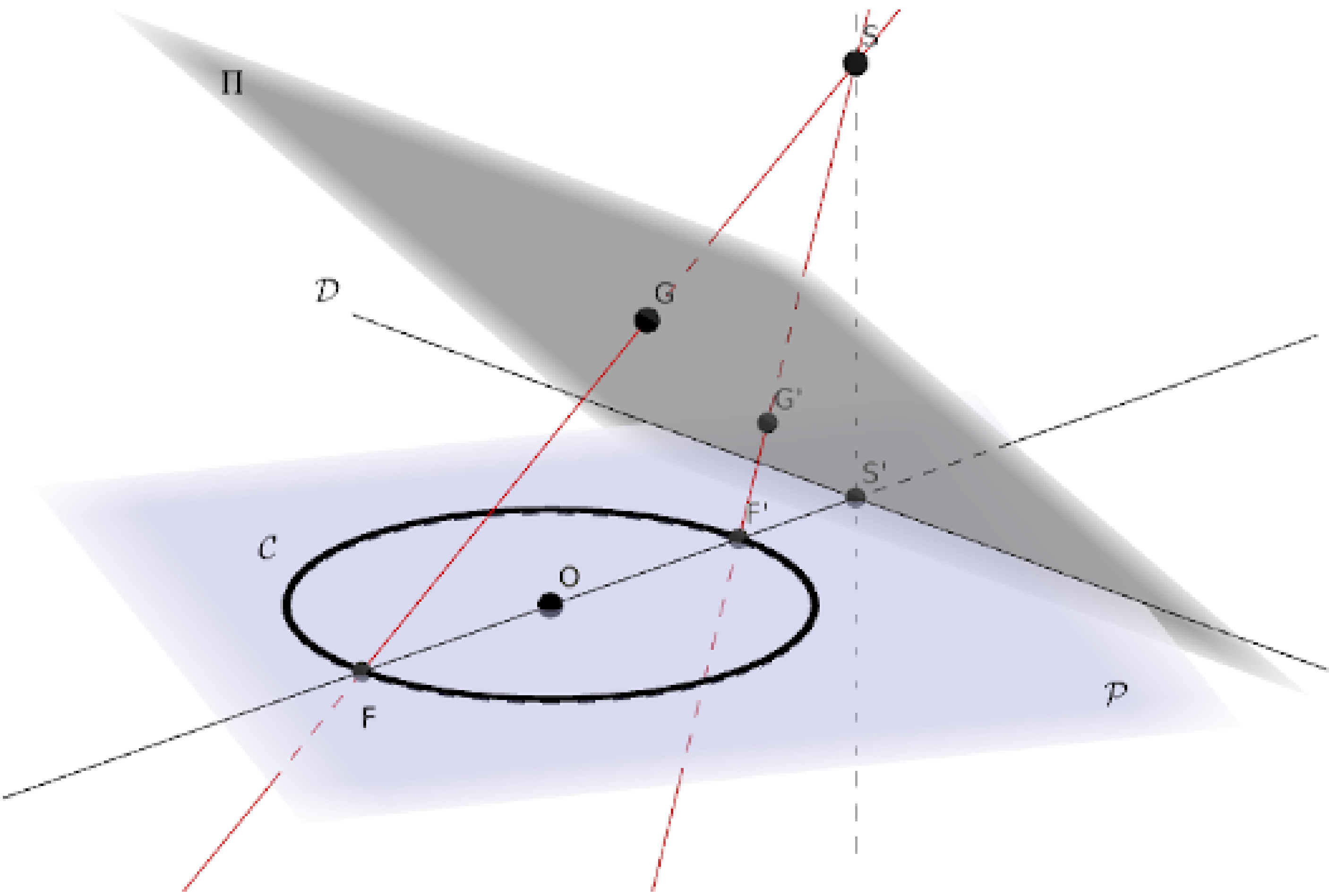
Considérons un plan $\mathscr{P}$ dans l'espace et un point S n'appartenant pas à $\mathscr{P}$. Étant donné un cercle $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{P}$, centré en un point O, le *cône* Γ de sommet S et de base $\mathscr{C}$ est l'ensemble des droites passant par S et par un point de $\mathscr{C}$. La droite (OP) est l'*axe* du cône Γ.

1. Illustrer cette construction sur *Geogebra*.
   (*Pour tracer Γ, on pourra placer un point animé sur $\mathscr{C}$ et afficher la trace de la droite* (SC).)

2. Démontrer que l'intersection du cône Γ et d'un plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ est encore un cercle, centré au point d'intersection de $\mathscr{P}'$ et de l'axe de Γ.
   (*Considérer l'intersection de* Γ *avec un plan contenant* S *et un diamètre de* $\mathscr{C}$, *puis utiliser le théorème de Thalès.*)

Soit S' le projeté orthogonal de S sur le plan $\mathscr{P}$. Dans ce qui suit, on suppose que S' est distinct du centre de $\mathscr{C}$; autrement dit, l'axe du cône Γ n'est pas perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{D}$ la droite perpendiculaire à (OS') passant par S' dans $\mathscr{P}$. La droite (OS') coupe $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés F et F' ; on convient de noter F celui de ces deux points qui est le plus éloigné de S'.

On considère finalement un point G sur le segment $[SF]$ et on note Π le plan contenant $\mathscr{D}$ qui passe par G. On désigne par $\mathscr{E}$ l'intersection de Π et de Γ.



3. Sur *Geogebra*, tracer $\mathscr{E}$ pour différentes positions du point G.

4. Si $G = F$, alors $\Pi = \mathscr{P}$ et $\mathscr{E}$ est le cercle $\mathscr{C}$. Sur *Geogebra*, pouvez-vous identifier une autre position de G telle que $\mathscr{E}$ soit un cercle (de rayon non nul) ?

   (*On pourra choisir deux points distincts* A *et* B *sur* $\mathscr{C} \setminus \{F\}$, *considérer les points* A' *et* B' *d'intersection de* (SA) *et* (SB) *avec* Π, *et tracer le cercle passant par* G, A' *et* B'.)

Plaçons maintenant le point G sur $[SF]$ de telle façon que $\widehat{SGS'} = \widehat{SF'F}$. Considérons un point P de $\mathscr{E} = \Gamma \cap \Pi$. Le plan parallèle à $\mathscr{P}$ passant par P coupe les droites (SF') et (SF) en A' et A respectivement.

5. Tracer la figure obtenue dans le plan $(SS'O)$.

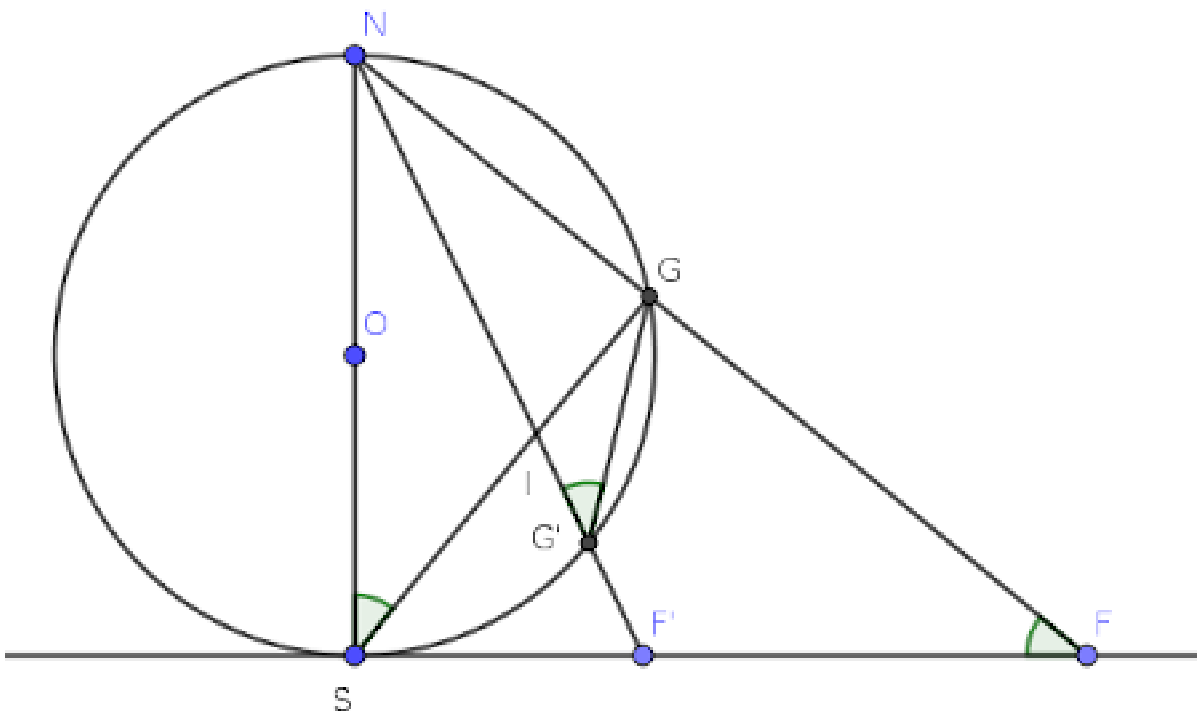
6. Soit P' le projeté orthogonal de P sur $[GG']$. En utilisant les questions 3.2 et 2.1, démontrer que l'on a
$$\left\langle \overrightarrow{P'G} | \overrightarrow{P'G'} \right\rangle = -PP'^2.$$

7. En déduire que $\mathscr{E}$ est un cercle.

4. L'image d'un cercle par π

Soit $\mathscr{C}$ le cercle sur Σ obtenu en intersectant la sphère Σ avec un plan $\mathscr{H}$.

1. Si $\mathscr{H}$ contient le point N, démontrer que $\pi(\mathscr{C})$ est la droite $\mathscr{H} \cap \Pi$.
2. Supposons que $\mathscr{H}$ ne contienne pas le point N. En utilisant les résultats de la partie 3 et en considérant la figure ci-dessous (figure 2), démontrer que $\pi(\mathscr{C})$ est un cercle.



3. Justifier les égalités d'angles sur la figure précédente.