L3 Mathématiques pour l'enseignement — Géométrie et arithmétique avec des logiciels
Université Lyon 1

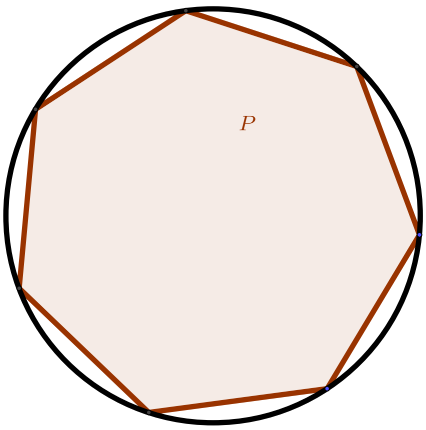
Projet X : Construction du dodécaèdre régulier

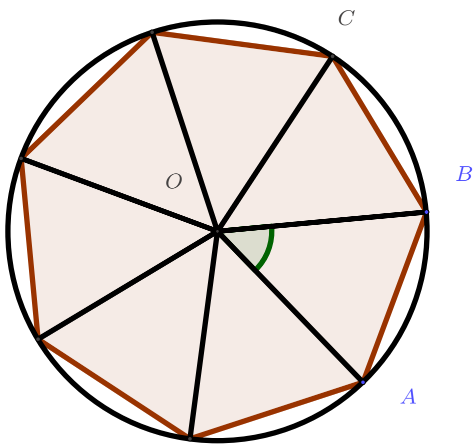
Blabla.

1. Polygones réguliers

Le but de cette partie est d'étudier quelques propriétés générales d'un polygone (convexe) régulier à n côtés.

Soit $n \geq 3$. Considédrons un polygone régulier convexe P à n côtés. C'est-à-dire que P a n sommets qui peuvent être placés sur un même cercle, et les arêtes de P (otbenues en reliant deux sommets consécutifs du cercle par un segment) ont toutes la même longueur. Le dessin ci-dessous montre l'exemple d'un polygone convexe régulier à 7 côtés.





1. On note O le centre du cercle sur lequel se trouve les n sommets de P, et on découpe P en n triangles en reliant les sommets de P à O. Considérons deux sommets consécutifs A et B sur le cercle. Quelle est la nature du triangle OAB ? (Justifiez).
2. Que vaut l'angle $\widehat{AOB}$?
3. En déduire la valeur des deux autres angles du triangle AOB.
4. On considère trois sommets de P consécutifs. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?
5. On note a la longueur AB. Exprimez le rayon AO en fonction de a et n.
6. Déterminez l'aire et le périmètre de P en fonction de a et n.

2. Construction du triangle d'or

Le but de cette partie est de construire à la règle et au compas (sur Geogebra) un triangle d'or, c'est-à-dire un triangle ABC isocèle en A tel que $\widehat{B} = \widehat{C} = 2\widehat{A}$.

1. On pose $\theta = \pi/5$. Définissons $x = \cos(\theta)$ et $y = \cos(2\theta)$. Montrez que $y = x^2 - 1$.
2. De même, en posant $\theta' = 2\theta$, exprimez $\cos(2\theta')$ en fonction de x, puis en déduire que $-x = 2y^2 - 1$.
3. En déduire une expression de $x + y$, puis que $x - y = 1/2$.
4. Conclure que $x = \cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/4$.

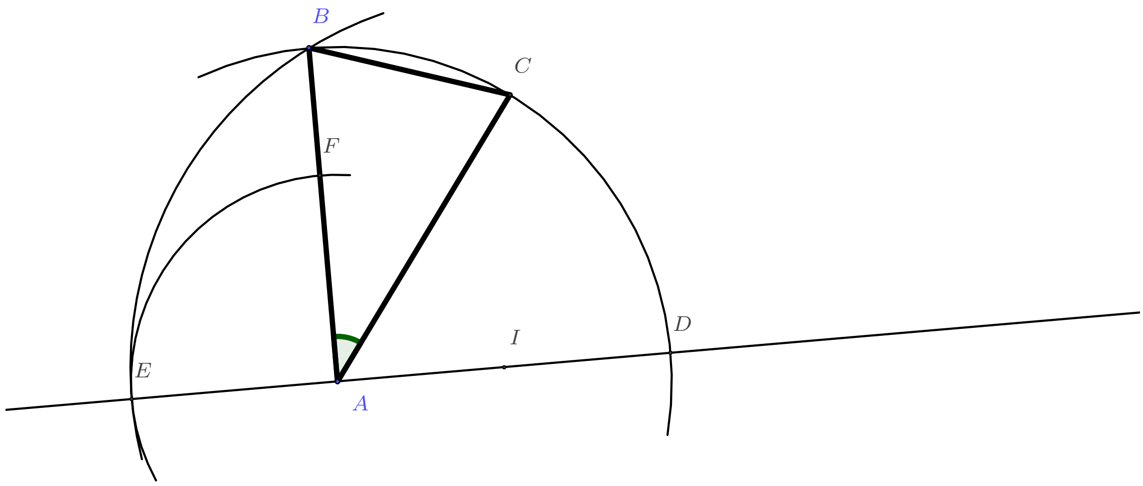
5. Soit ABC un triangle isocèle en A. On note $a = BC$ et $b = AB = AC$, et on suppose que $b/a = (1+\sqrt{5})/2$. Justifiez que $\widehat{A} < \pi/2$.
6. En utilisant la loi des cosinus, on peut montre que

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

(on ne demande pas de le prouver). En déduire que $\widehat{A} = \pi/5$.

L'objectif est maintenant de constuire un triangle d'or à la règle et au compas. Par ce qui précède, c'est un ABC isocèle en A tel que le rapport AB/BC soit égal au nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$.

7. Placez deux points dans le plan A et B.
8. Tracez la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (AB) et passant par A.
9. Placez un point D sur $\mathcal{D}$ de sorte que $AD = AB$.
10. Placez le point I milieu de $[AD]$.
11. Placez le point E sur $\mathcal{D}$ de sorte que $IE = IB$ et que A soit entre D et E.
12. Placez le point F sur le segment $[AB]$ de sorte que $AF = AE$.
13. Enfin, placez le point C de sorte que $AC = AB$ et $BC = AF$. Sauvergardez votre travail dans un fichier *groupe_X_triangleOr.ggb*.



14. On suppose que la distance AB vaut 1. Calculez la distance BC. *Indication :* On pourra commencer par calculer la distance IB.
15. En déduire que ABC est un triangle d'or.
16. Créer un outil `TriangleOr` qui à partir de deux points A et B construit un triangle d'or par la technique précédente.

3. Construction d'un pentagone régulier

Le but de cette partie est maintenant de construire à la règle et au compas (sur Geogebra) un pentagone régulier. On va utiliser les résultat précédent et partir de la construction d'un triangle d'or.

1. Soit ABC un triangle d'or (isocèle en A). Construire un point D tel que le triangle ABD soit isocèle en A avec $\widehat{BDA} = 2\pi/5$.
2. A partir de BDA, construire un pentagone régulier $\mathcal{P}$ de centre A tel que BD soit l'un des côté de $\mathcal{P}$. Sauvergardez votre travail dans un fichier *groupe_X_pentagone.ggb*.
3. Créer un outil `Pentagone` qui à partir de deux points A et B créer un pentagone régulier de centre A et dont l'un des sommets est B.On sauvegardera les outils `TriangleOr` et `Pentagone` dans un fichier séparé *groupe_X_outils_pentagone.ggt* (où X désigne votre numéro de groupe).

4. Construction d'un hexagone régulier

1. Construisez sur Geogebra (sans utiliser l'outil "Polygone régulier", uniquement avec des cercles et des points d'intersection) un hexagone régulier à partir de son centre et de l'un de ses sommets. Sauvergardez votre travail dans un fichier *groupe_X_hexagone.ggb*.
2. Justifiez votre construction.