

## PROJET X : AUTOUR DES NOMBRES DE MARKOV

En 1979, le mathématicien russe Andreï Markov a étudié les triplets d'entiers naturels non nuls  $(x, y, z)$  solutions de l'équation suivante (dite équation de Markov) :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz. \quad (1)$$

Un nombre de Markov est un nombre apparaissant dans un triplet de Markov. Le but de ce projet (Python) est d'étudier certaines propriétés arithmétiques des triplets de Markov.

### 1. Triplets de Markov

*Définition.* On dit que  $(x, y, z)$  est un triplet de Markov si  $x, y, z$  sont des entiers  $> 0$  satisfaisant l'équation de Markov (1). Si  $x \leq y \leq z$ , on dit que c'est un triplet de Markov *normalisé*.

Par symétrie de l'équation de Markov, on peut réordonner les coordonnées de n'importe quel triplet de Markov pour obtenir un triplet de Markov normalisé.

1. Ecrire en Python un algorithme `Ordonner` prenant en entrée une liste d'entiers et qui la réordonne dans l'ordre croissant.
2. Implémenter un algorithme `EstTriplet` prenant en entrée une liste de 3 entiers  $[x, y, z]$  et qui renvoie "True" si  $(x, y, z)$  est un triplet de Markov et "False" sinon.
3. Déterminez tous les triplets de Markov de la forme  $(x, x, x)$ .
4. Nous allons maintenant déterminer les triplets de Markov dont exactement deux coordonnées sont égales. Soit  $(x, z, z)$  un triplet de Markov avec  $x < z$ . Montrez que  $(3x - 2)z^2 = x^2$ .
5. En déduire une contradiction. Il n'y a donc aucun triplet de Markov de la forme  $(x, z, z)$  avec  $x < z$ .
6. Supposons maintenant que  $(x, x, z)$  est un triplet de Markov avec  $x < z$ . Montrez que  $x^2$  divise  $z^2$ , puis que  $x$  divise  $z$ .
7. Posons  $z = kx$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Montrez que  $k(3x - k) = 2$  puis en déduire l'ensemble des triplets de Markov normalisés de la forme  $(x, x, z)$  avec  $x < z$ .

### 1. Arbre de Markov

Le but de cette partie est de décrire une méthode pour obtenir tous les triplets de Markov. On définit la fonction  $T$  par la formule  $T(x, y, z) = (x, y, 3xy - z)$ .

1. Implémentez la fonction  $T$  en Python. On prendra en entrée une liste d'entiers  $[x, y, z]$ .
2. Montrez que si  $(x, y, z)$  est un triplet de Markov, alors  $T(x, y, z)$  l'est aussi.
3. Montrez que  $T(T(x, y, z)) = (x, y, z)$ .
4. Soit  $(x, y, z)$  un triplet de Markov normalisé avec  $z > 1$ . Montrez que  $3xy - z < z$ . *Indication :* Multipliez par  $z$  puis montrez que cela revient à montrer que  $2(x^2 + y^2) < 3xyz$ . On pourra alors utiliser le fait que  $z \geq y + 1$  (qu'on justifiera).
5. Montrez que  $3yz - x \geq 3xz - y > z$ .

On appelle *taille* d'un triplet d'entiers la valeur de sa plus grande coordonnée. Soit  $t = (x, y, z)$  un triplet de Markov normalisé. Par les questions précédentes, on vient de prouver qu'on peut associer à  $t$  trois autres triplets de Markov (pas forcément normalisés) :  $t_1 = (x, y, 3xy - z)$ ,  $t_2 = (x, z, 3xz - y)$  et  $t_3 = (y, z, 3yz - x)$ . Par ailleurs, la taille de  $t_2$  et la taille de  $t_3$  sont toutes deux strictement plus grande que la taille de  $t$  (qui vaut  $z$  puisque  $t$  est normalisé). D'autre part, la taille de  $t_1$  est strictement inférieure à la taille de  $t$ .

6. Ecrire un programme Python `TripletEnfants` qui prend en entrée un triplet de Markov normalisé  $[x, y, z]$  et qui renvoie les deux plus grands triplets de Markov **normalisés** – appelés *enfants* de  $t = (x, y, z)$  – associés par la méthode précédente à  $t$ . Ecrire un programme `TripletAncetre` qui associe à  $[x, y, z]$  le plus petit triplet de Markov normalisé – appelé ancêtre de  $t$  – associé à  $t$  par la méthode précédente.
7. Donnez la liste des 8 premiers triplets de Markov qu'on peut obtenir en utilisant successivement `TripletEnfants` en commençant avec  $t = (1, 1, 1)$ .
8. Justifier que tout triplet de Markov normalisé  $t$  est un descendant de  $(1, 1, 1)$ , autrement dit qu'il existe une suite de triplets de Markov (normalisés)  $t_0, t_1, \dots, t_n$  telle que  $t_0 = (1, 1, 1)$ ,  $t_n = t$  et  $t_{k+1}$  est un enfant de  $t_k$  pour  $k = 0, \dots, n - 1$ . *Indication* : Constuire une suite de triplets de Markov normalisés  $u_0 = t, u_1, \dots$  où  $u_{k+1}$  est l'ancêtre de  $u_k$ . Justifiez que cette suite est finie et que le dernier ancêtre est nécessairement  $(1, 1, 1)$ .
9. Proposez un algorithme `ArbreMarkov` prenant en entrée un entier  $n$  et renvoyant l'arbre de Markov construit à partir de l'ancêtre  $(1, 2, 5)$  jusqu'aux enfants de la génération  $n$ . *Indication* : Plusieurs choix sont possibles pour la structure de l'Arbre. Ce peut être une structure récursive de type liste à trois éléments telle que
  - (a)  $L[0]$  soit la racine (on commence avec  $(1, 2, 5)$ )
  - (b)  $L[1]$  soit la branche de droite (encore une liste à trois éléments donnant la valeur du triplet, la branche de droite et la branche de gauche)
  - (c)  $L[2]$  soit la branche de gauche.

## 2. Nombres de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$  par  $(F_0, F_1) = (0, 1)$  et par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geq 0).$$

1. Implémentez un programme `FiboListe` prenant en entrée un entier  $n$  et renvoyant la liste  $[F_0, F_1, \dots, F_n]$ .
2. Implémentez un algorithme récursif `FiboRec` prenant un entier  $n$  et renvoyant  $F_n$ .
3. Prouvez que pour tout  $n \geq 0$  on a  $3F_{2n+1} - F_{2n-1} = F_{2n+3}$ .
4. Etant donné  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $M_n = (1, F_{2n-1}, F_{2n+1})$ . Déduire de la question précédente que  $M_{n+1} = T(1, F_{2n+1}, F_{2n-1})$ .
5. Prouvez par récurrence sur  $n$  que  $M_n$  est un triplet de Markov pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .