L3 Mathématiques pour l'enseignement
Université Lyon 1

Géométrie et arithmétique avec des logiciels

Projet X : La Cardioïde

La cardioïde est une courbe du plan qui ressemble à un coeur, d'où son nom – qui vient du grec kardia (cœur) – et qui fut baptisé ainsi par Jean Castillon. Le but de ce projet est d'utiliser Geogebra pour construire géométriquement de deux manières différentes la cardioïde, ainsi que d'en donner une équation cartésienne et une équation paramétrique. Il est recommandé d'apporter un soin particulier aux fichiers Geogebra (mettre une légende, utiliser des boites de sélection pour afficher / masquer les traits de construction par exemple...

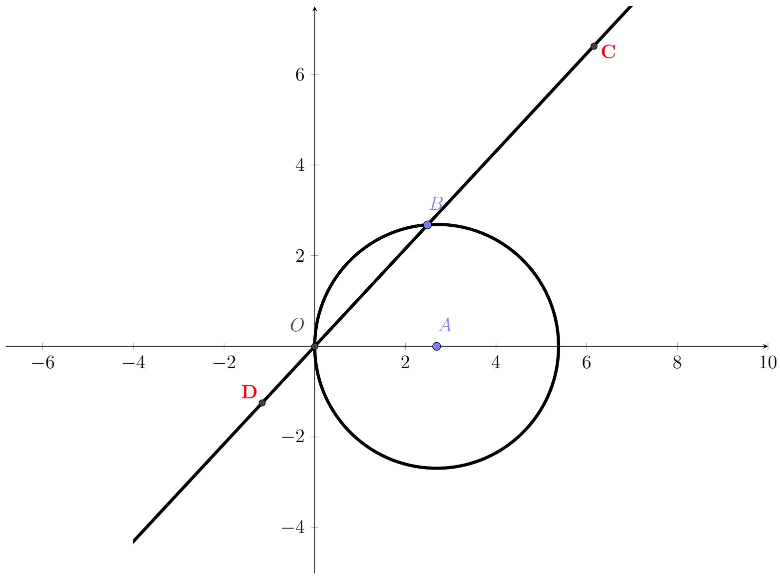
1. Construction géométrique de la cardioïde (Geogebra)

— Placez le point O de coordonnées $(0, 0)$.

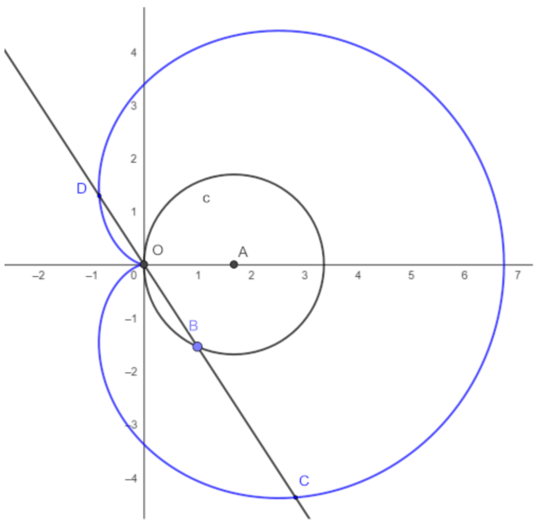
— Définir un curseur a (compris entre 1 et 5) puis un point A de coordonnées $(a, 0)$.

— Construire le cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par O, puis placez un point B sur $\mathcal{C}$.

— Construire C et D sur la droite (OB) tels que $BC = BD = 2a$.



La cardioïde est la courbe que parcourent C et D lorsque B décrit le cercle $\mathcal{C}$. Tracez la cardioïde à l'aide d'une animation. Sauvegardez votre travail dans un fichier Geogebra *groupe_X_cardioide_1.ggb* (ou X est le numéro de votre groupe).



2. Equation paramétrique de la cardioïde

On note θ l'angle $\widehat{AOB}$ et on suppose $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Quelle est la nature du triangle AOB ? (justifiez).
2. Montrez que $OB = 2a\cos(\theta)$. *Indication :* On pourra introduire I le milieu de $[OB]$ et remarquer que le triangle OIA est rectangle en I.
3. En déduire une expression pour les distances OC et OD.
4. Conclure que la cardioïde est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = 2a(\cos(t)+1)$, où $t = \widehat{AOM}$. *Indication :* On pourra remarquer que les angles orientés $\widehat{AOC}$ et $\widehat{AOD}$ vérifient $\widehat{AOC} = \theta$ et $\widehat{AOD} = \theta + \pi$. Par ailleurs $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$.
5. Déduire de la question précédente que la cardioïde est l'ensemble des points $(x(t), y(t))$ du plan tels que

$$x(t) = 2a\cos(t)(\cos(t)+1) \quad \text{et} \quad y(t) = 2a\sin(t)(\cos(t)+1) \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

3. Equation cartésienne de la cardioïde

1. Déduire de la partie précédente que tout point $M = (x, y)$ sur la cardioïde vérifie

$$(x^2+y^2-2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2). \tag{1}$$

2. Réciproquement, soit $M = (x, y)$ un point du plan vérifiant (1). Le but est de montrer que M est un point de la cardioïde. On définit $t = \widehat{AOM}$. Ecrire x et y en fonction de t.
3. En utilisant (1), montrer que OM satisfait une équation polynomial de degré 2.
4. Déterminez OM.
5. En utilisant les résultats de la partie précédente, en déduire que M est sur la cardioïde.

4. Nouvelle construction géométrique de la cardioïde (Geogebra)

Le but de cette partie est de montrer que la cardioïde est la trajectoire parcourue par un point fixe d'un cercle $\mathcal{C}_1$ roulant sur un cercle $\mathcal{C}_2$ de même diamètre a.

— Placez le point O de coordonnées $(0, 0)$.

— Définir un curseur a (compris entre 1 et 5) puis un point A de coordonnées $(a, 0)$.

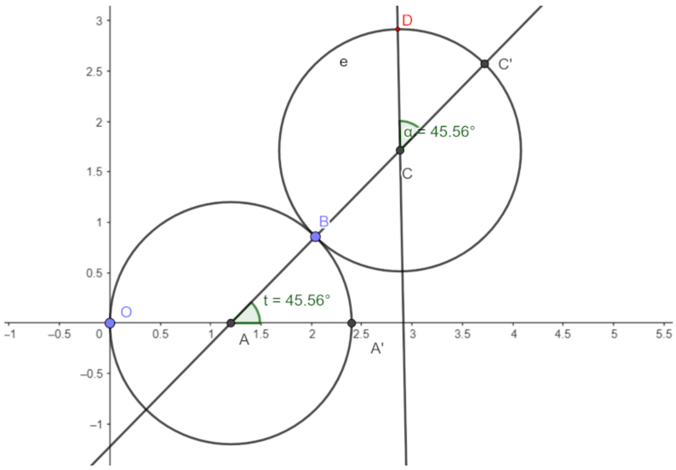
— Placez un point B sur le cercle de centre A passant par O, puis constuire C tel que A, B, C soient alignés (dans cet ordre) avec $AB = BC$.

— Constuire le cercle de centre C passant par B.

— Construire l'angle $t = \widehat{A'AB}$.

— Construire l'angle $\widehat{C'CD} = t$ (en utilisant l'outil *Angle de mesure donné*).

— Animez le point B et observez.
Sauvegardez votre travail dans un fichier Geogebra *groupe_X_cardioide_2.ggb* (ou X est le numéro de votre groupe).



5. Une preuve géométrique

1. On définit F le point d'intersection des droites (OA) et (DC). Quelle est la nature du triangle ODF ? (Justifiez) En déduire que (OD) et (AC) sont parallèles.
2. On note E le point d'intersection du cerlce de centre A passant par O et de la droite (OD). Quel est la nature du quadrilatère $ACDE$? (Justifiez). En déduire la distance ED.
3. Justifiez pourquoi le point E est bien sur la cardioïde définie comme dans la partie 1.

Réciproquement, on peut aussi montrer avec un raisonnement similaire que n'importe quel point sur la cardioïde (définie comme dans la partie 1) est de la forme de l'un des points D construits dans la partie 4. On ne demande pas de prouver ce résultat (mais sentez-vous libres d'essayer).