Projet X : Fractions continues

Une fraction continue est une expression de la forme :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

comportant un nombre fini ou infini d'étages, où $a_0 \in \mathbb{Z}$ *et* $a_1, a_2, \dots$ *sont des entiers* > 0*. C'est une manière de représenter les nombres réels (tout comme l'écriture décimale d'un réel en est une autre). Le but de ce projet (Python) est d'introduire la notion de fractions continues et de donner un sens à une fraction continue infinie.*

1. Retour sur l'algorithme d'Euclide

Soit u_0 et v_0 deux entiers > 0. L'algorithme d'Euclide nous donne des suites $(u_i)_{i\geq 0}$, $(v_i)_{i\geq 0}$, $(a_i)_{i\geq 0}$ et $(r_i)_{i\geq 0}$ définies de la manière suivante :

— $a_i = \lfloor u_i/v_i \rfloor$, quotient de la division euclidienne de u_i par v_i,

— $r_i \in \{0, \dots, v_i - 1\}$ le reste de la division euclidienne de u_i par v_i, de sorte que

$$u_i = a_i v_i + r_i, \tag{1}$$

— Tant que $r_i \neq 0$, on pose $(u_{i+1}, v_{i+1}) = (v_i, r_i)$ et on recommence.

1. Posons $x_i = u_i/v_i$. Montrez que $a_i = \lfloor x_i \rfloor$ et que tant que $a_i \neq x_i$, on a $x_{i+1} = 1/(x_i - a_i)$.
2. Ecrire un programme `QuotientsEuclide` prenant en entrée u_0 et v_0 et qui renvoie les listes $(a_i)_{i\geq 0}$.
3. Soit k le plus petit entier tel que $x_k = a_k$. En utilisant (1) montrez que

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}},$$

   (on supposera que $k \geq 1$ pour la première égalité et $k \geq 2$ pour la deuxième).
4. Plus généralement, montrez par recurrence sur i que pour $i = 1, \dots, k$ on a

$$x_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{x_i}}}}.$$

5. En déduire que

$$x_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}. \tag{2}$$

   La fraction de droite est appelée *développement en fraction continue* de x_0. Pour simplicité, on la note $[a_0, a_1, \dots, a_k]$.

2. Fractions continues infinies

On va maintenant considérer des fractions continues infinies, obtenues à partir d'un nombre réel x qui n'est pas rationnel.

Soit x un nombre réel. On associe à x une suite d'entiers $(a_i)_{i\geq 0}$ (avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i > 0$ pour tout $i \geq 1$) de la manière suivante. On pose $x_0 = x$. On définit par récurrence

— $a_i = \lfloor x_i \rfloor$,

— si $x_i \neq a_i$, on pose $x_{i+1} = 1/(x_i - a_i)$.

En utilisant la même preuve qu'à la partie précédente, on peut montrer que pour tout i tel que x_i est bien défini, on a

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{x_i}}}} := [a_0, \ldots, a_{i-1}, x_i]. \tag{3}$$

1. Montrez que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est finie si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.
2. Codez en Python un algorithme `FractionListe` qui prend en argument une liste d'entiers $a_0, \ldots, a_k$ et qui renvoie la fraction continue $[a_0, \ldots, a_k]$ définie comme en (2). *Indication :* on pourra essayer de procéder de manière récursive.
3. Soit x le nombre correspondant à $[1, 1, 1, 1, 2]$. Vérifiez que lorsque vous appliquez l'algorithme `QuotientsEuclide` à x vous retrouvez bien $[1, 1, 1, 1, 2]$.

On suppose désormais x irrationnel (de sorte que la suite $(a_i)_{i\geq 0}$ est infinie). Etant donnée $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels (qu'on suppose inversible), on définit une application f_M par

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

4. Codez une fonction `Homographie` qui prend en argument une matrice M et un réel z et renvoie $f_M(z)$.
5. Soit A, B deux matrices de taille 2 inversible et à coefficients réels. On pose $M = AB$. Montrez que $f_M = f_A \circ f_B$, c'est-à-dire que pour tout z (tel que les fonctions soient bien définies) on a $f_M(z) = f_A(f_B(z))$.
6. On pose $g_{-1}(z) = 1/z$, et pour tout entier $n \geq 0$, on définit

$$g_n(z) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_n + z}}}.$$

   Montrez que pour tout $n \geq -1$, on a

$$g_{n+1}(z) = g_n \circ f_M(z) \qquad \text{où } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Indication : Remarquons que $g_{-1} = f_M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. En déduire que $g_n = f_{M_n}$, où

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

8. Etant donné $n \geq 0$, écrivons $M_n = \begin{pmatrix} p'_n & p_n \\ q'_n & q_n \end{pmatrix}$. Montrez que $p'_n = p_{n-1}$ et $q'_n = q_{n-1}$ (avec la convention $p_{-1} = 1$ et $q_{-1} = 0$). Autrement dit $M_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$.
9. Quel est le déterminant de M_n ? Ecrivez un algorithme `Determinant` qui prend en argument une matrice carrée de taille 2 et renvoie son déterminant. Vérifiez sur un exemple que $\det(M_n)$ renvoie la réponse attendue.
10. En déduire que p_n et q_n sont premiers entre eux.
11. En utilisant la relation de récurrence entre M_{n+1} et M_n, montrez que les suites $(p_n)_{n\geq -1}$ et $(q_n)_{n\geq -1}$ vérifie la relation de récurrence

$$u_{n+1} = a_{n+1}u_n + u_{n-1}.$$

12. Codez un algorithme `Rec` prenant en argument une liste (finie) d'entiers $a_0, \dots, a_n$ et qui renvoie les listes $(p_i)_{-1\leq i\leq n}$ et $(q_i)_{-1\leq i\leq n}$ en utilisant la formule de récurrence ci-dessus.
13. En combinant (3) avec ce qui précède, montrez que pour tout $n \geq 0$ on a

$$x = f_M(x_n) \qquad \text{où } M = M_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(rappelons que les x_i ont été définis en début de partie).
14. En déduire que

$$|x_{n+1}| = \frac{|q_{n-1}x - p_{n-1}|}{|q_n x - p_n|}.$$

15. Conclure que la suite $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ converge vers x. *Indication :* On justifiera que $(q_n)_{n\geq 0}$ tend vers l'infini.
16. Justifiez qu'on peut écrire

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} \qquad \text{(fraction infinie).}$$

Il est possible d'estimer de manière très précise les quantités $|q_n x - p_n|$. Avec un peu plus de travail, on obtient que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2},$$

(on ne demande pas de prouver ce résultat). Les nombres p_n/q_n (appelés les réduites de x) sont donc de très bonnes approximations rationnelles de x. On peut même montrer, en un sens, que ce sont les meilleures approximations rationnelles de x.