Fiche de TD 1
Quelques bijections, relations d'équivalence et relations d'ordre

Exercice 1 Trouver une bijection $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Exercice 2 a) Montrer que l'application

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto 2^m(2n+1) - 1$$

est une bijection.

b) Montrer que l'application

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

est une bijection.

c) Si $F = \{a_0 < a_1 < ... < a_k\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, on pose $\phi(F) = 2^{a_0} + 2^{a_1} + ... + 2^{a_k}$. Montrer que ϕ est une bijection entre l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$. Existe-t-il une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$?

Exercice 3 a) On définit par récurrence $r_1 = 1$ et si $n > 0$, si $r_n = \frac{a}{b}$ avec a, b entiers > 0 premiers entre eux,

$$r_{2n} := \frac{a}{a+b},\ r_{2n+1} = \frac{a+b}{a}\ .$$

Déterminer les 10 premiers termes de cette suite.

b) Montrer que $\mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $n \mapsto r_n$ est une bijection.
Indication. Voici la réciproque : on pose $g(1) = 1$ *et*

$$g(q) = \begin{cases} 2g(\frac{q}{1-q}) & \textit{si } 0 < q < 1, \\ 2g(\frac{1}{q-1}) + 1 & \textit{si } q > 1. \end{cases}$$

†

†. Si $k > 0$, on pose $\mathbb{Q}_k = \{\frac{a}{b}\ :\ a, b > 0, \max\{a,b\} = k, \mathrm{pgcd}(a,b) = 1\}$. Vérifier que $\mathbb{Q}_{>0} = \sqcup_k \mathbb{Q}_k$ ...

Exercice 4 a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On note $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. Montrer que la relation $\sim$ est d'équivalence. On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ ‡, $\overline{x} \mapsto e^{2i\pi x}$ est une bijection.

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $x, y \in \mathbb{Z}$, on note $x \sim y$ si $n | x - y$. Montrer que la relation $\sim$ est d'équivalence et que l'on a une bijection :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mu_n,\ \overline{x} \mapsto e^{\frac{2i\pi x}{n}} .$$

†

Exercice 5 Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On pose $(a, b) \sim (c, d)$ si $ad = bc$. Montrer que la relation $\sim$ est d'équivalence pour l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Exercice 6 Soit $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (r_n) est de Cauchy si :

$$\forall\, A \in \mathbb{Z}_{>0},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, m, n \geqslant N,\ |r_m - r_n| < \frac{1}{A} .$$

On note $\mathscr{C}(\mathbb{Q})$ l'ensemble des suites rationnelles de Cauchy.

Si $r = (r_n)$, $s = (s_n)$ sont de Cauchy, on note $r \sim s$ si $\lim_n r_n - s_n = 0$. Montrer que c'est une relation d'équivalence !

Exercice 7 a) Si $k, l \in \mathbb{Z}$, posons $k \prec l$ si $k | l$. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}$. Est-elle totale ?

b) Mêmes questions avec $\{2^q \ :\ q \in \mathbb{N}\}$ à la place de $\mathbb{N}$.

‡. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathbb{R}$ et S^1 les nombres complexes de module 1.

†. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence des entiers et μ_n l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.