

Feuille d'exercices n° 6

GROUPES

1 Généralités

1.1 Exemples et non-exemples

Soit X un ensemble, on note \mathcal{F}_X l'ensemble des fonctions de X dans X et \mathcal{S}_X l'ensemble des bijections de X sur X .

a) On fixe une partie A de X . Quels sont les groupes dans la liste suivante (l'opération est la composition) ?

$$(i) \mathcal{F}_X; \quad (ii) \mathcal{S}_X; \quad (iii) \{\sigma \in \mathcal{S}_X, \sigma(A) \subset A\}; \quad (iv) \{\sigma \in \mathcal{S}_X, \sigma(A) = A\}.$$

b) Ici, on prend $X = \mathbb{R}^n$ pour n entier naturel. Même question avec :

$$(v) \{\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}^n}, \sigma \text{ isométrie}\}; \quad (vi) \{\sigma \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}, \sigma \text{ linéaire et } \det(\sigma) \geq 0\}.$$

c) Soit n un entier, $n \geq 2$. Est-ce que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe ?

d) Les ensembles suivants, munis du produit matriciels, sont-ils des groupes ?

$$(viii) \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}^{+*} \right\}; \quad (ix) \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc > 0 \right\}.$$

1.2 Racines de l'unité

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^*, z^n = 1\}$. Montrer que μ_n est un groupe d'ordre n .

1.3 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien de cardinal n .

b) Vérifier que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ est un monoïde commutatif. Est-ce un groupe ? (Justifier).

c) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $(m, n) = 1$;
- b) \bar{m} engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$;
- c) \bar{m} est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$.

d) En déduire que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$ est un groupe abélien de cardinal $\varphi(n)$ (la fonction d'Euler, dont la valeur est le nombre d'entiers relativement premiers à n , entre 1 et $n - 1$).

1.4

Soit I et J les deux matrices suivantes de $GL_2(\mathbb{C})$:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Dresser la table de multiplication du sous groupe $Q = \langle I, J \rangle$ de $GL_2(\mathbb{C})$.
- Calculer l'ordre de tout élément de Q .
- Calculer les sous-groupes de Q .
- Calculer le centre de Q .
- Existe-t-il un élément $a \in Q$ tel que $Q = \langle a \rangle$?

1.5 Groupe symétrique

On considère les transpositions adjacentes du groupe symétriques S_4 suivantes :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2134, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1324 \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 1243.$$

On considère les sous-groupes

$$H = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle; \quad K = \langle \tau_2, \tau_3 \rangle; \quad L = \langle \tau_1, \tau_3 \rangle.$$

- Quels sont les ordres de H, K et L ?
- Écrire la table de multiplication de ces sous-groupes. Sont-ils abéliens ?
- Que remarquez-vous ?

2 Sous-groupes, morphismes

2.1 Intersection et réunion de sous-groupes

- L'intersection d'une famille non vide quelconque de sous-groupes de G est un sous-groupe.
- Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G . Démontrer que $H \cup K$ est un sous-groupe si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

2.2 Morphismes

Soient $\theta : G \rightarrow G'$ et $\psi : G' \rightarrow G''$ deux morphismes de groupes. Montrez que :

- $\theta(e) = e'$;
- $\theta(x^{-1}) = \theta(x)^{-1}$;
- $H \leq G$ implique $\theta(H) \leq G'$;
- $H' \leq G'$ implique $\theta^{-1}(H') \leq G$, où $\theta^{-1}(H') = \{x \in G \mid \theta(x) \in H'\}$;
- $\psi \circ \theta : G \rightarrow G''$ est un morphisme de groupes ;
- $\theta(\langle S \rangle) = \langle \theta(S) \rangle$, pour tout $S \subseteq G$;
- $\text{ord}(\theta(x))$ divise à la fois $\text{ord}(x)$ et $|\text{Im}(\theta)|$, pour tout $x \in G$.

2.3 Isomorphisme de groupes

- a) Est-ce que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ et $(\mathbb{Z}_4, +)$ sont deux groupes isomorphes ?
b) Montrer que les groupes additifs suivants sont deux à deux non isomorphes :

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_8.$$

2.4

Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \times) , $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +)$, $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}, +)$ (où $n \geq 2$) sont deux à deux non isomorphes. Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ sont isomorphes.

2.5

Soit G un groupe noté multiplicativement. À quelle condition l'application $\phi : G \rightarrow G, x \rightarrow x^{-1}$ est-elle un morphisme ?

2.6

Soient G et G' deux groupes finis tels que $\text{PGCD}(|G|, |G'|) = 2$. Montrez que s'il existe un morphisme $\theta : G \rightarrow G'$ tel que $\text{Ker}(\theta) \neq G$, alors G admet un sous-groupe d'indice 2.

2.7 Sous-groupe engendré

Soit G un groupe (noté multiplicativement) et soit X une partie de G . L'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent X est un sous-groupe (pourquoi est-elle non vide ?). On note $\langle X \rangle$ ce sous-groupe.

- a) Vérifie que si H est un sous-groupe de G qui contient X , alors $\langle X \rangle \subset H$.
b) Supposons que $X = \{g\}$. Vérifier que $\langle X \rangle = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, quels sont les éléments g de μ_n qui engendrent μ_n ? Même question avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
c) Comment décrire le groupe engendré par un élément dans un groupe noté additivement ? Décrire $\langle X \rangle$ lorsque G est le groupe additif \mathbb{R} et $X = \{1, \sqrt{2}\} \subset \mathbb{R}$.
d) À nouveau, $G = \mathbb{R}$. Soient a et b deux rationnels. Montrer que $\langle \{a, b\} \rangle = \{k/m, k \in \mathbb{Z}\}$, où m est le ppcm des dénominateurs de a et b (écrits sous forme irréductible) et k le pgcd.

2.8 Ordre d'un élément

Soit G groupe (noté multiplicativement) de neutre e . L'ordre d'un élément g est, s'il existe, le plus petit entier naturel non nul n tel que $g^n = e$; si $g^k \neq e$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que g est d'ordre infini.

- a) Vérifier que le seul élément d'ordre 1 est e .
b) Soit g un élément de G . Montrer que $\langle g \rangle$ est isomorphe à μ_n ou à \mathbb{Z} , selon que l'ordre n de g est fini ou infini.
c) Soit g un élément d'ordre n et soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $g^k = e$ si et seulement si n divise k .
d) Exprimer l'ordre de g^k en fonction de k et de l'ordre de g .

2.9 Groupes cycliques

- Montrer qu'un groupe d'ordre premier est cyclique.
- Étant donnés deux groupes G_1 et G_2 , montrer que $G_1 \times G_2$ est cyclique si et seulement si G_1 et G_2 le sont et $\text{PGCD}(|G_1|, |G_2|) = 1$.
- Pour G cyclique d'ordre n et $d|n$, montrer que G admet un unique sous-groupe d'ordre d et que ce sous-groupe est cyclique. Combien G a-t-il d'éléments d'ordre d ?

2.10 Théorème de Lagrange

- Soit G un groupe tel que tout élément $x \neq e$ a ordre 2. Montrez que G est abélien.
- Soit G un groupe d'ordre 10. Montrez qu'il possède un élément d'ordre 5.
- Soit G un groupe qui a un sous-groupe d'ordre 4 et un d'ordre 10. Sachant que l'ordre de G est plus petit que 50, en déduire les ordres possibles de G .

2.11 Groupe quotient

Soit $G = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid \text{PGCD}(m, n) = 1 \text{ et } n \text{ divise } 12\}$

- Montrez que G est un sous groupe de $(\mathbb{Q}, +)$.
- Calculez l'ordre du groupe quotient G/\mathbb{Z} et prouvez que G/\mathbb{Z} est un groupe cyclique.
- Calculer l'ordre du groupe quotient G/\mathbb{Z}_3 .

2.12 Automorphismes intérieurs

Soit G un groupe. Pour tout $h \in G$, on note $\text{Ad}_h : G \rightarrow G, g \mapsto hgh^{-1}$. C'est l'application de conjugaison par h .

- Vérifier que l'application $\text{Ad}_h : G \rightarrow G, g \mapsto hgh^{-1}$ est un automorphisme de G . Vérifier aussi que $\text{Ad}_h = \text{Id}_G$ si et seulement si pour tout g de G , h et g commutent.
- Montrer que $\text{Ad} : G \rightarrow \text{aut}(G), h \mapsto \text{Ad}_h$ est un morphisme. Quel est son noyau?
- Soit h un élément de G et soit θ un automorphisme de G . Calculer $\theta \circ \text{Ad}_h \circ \theta^{-1}$.

2.13 Matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $G = (GL_3(3), \cdot)$ le groupe des matrices inversibles de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

- Quel est l'ordre de G ?
- Soit $T_3(3) = \{A \in G \mid a_{ij} = 0, \forall i, j, i > j\}$. Montrez qu'il est un sous-groupe de G . Quel est son ordre? Quel est l'ordre de ses éléments?
- Soit $D_3(3) = \{A \in G \mid a_{ij} = 0, \forall i, j, i \neq j\}$. Montrez qu'il est un sous-groupe de $T_3(3)$. Quel est son cardinal? Quel est l'ordre de ses éléments?
- Soit $UT_3(3) = \{A \in T_3(3) \mid a_{ii} = 1, \forall i\}$. Montrez qu'il est un sous-groupe de $T_3(3)$. Quel est son ordre? Quel est l'ordre de ses éléments?
- Montrez que tout élément de $T_3(3)$ s'écrit comme un produit d'un élément de $D_3(3)$ pour un élément de $UT_3(3)$.

3 Quelques propriétés du groupe symétrique

3.1

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des cycles de longueurs respectives ℓ_1, \dots, ℓ_r dont les supports sont tous disjoints et soit $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$. Montrer qu'une permutation σ' est conjuguée à σ si et seulement si σ' s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints $\gamma'_1, \dots, \gamma'_r$ de longueurs respectives ℓ_1, \dots, ℓ_r .

3.2

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que le groupe symétrique \mathcal{S}_n est engendré par chacune des parties suivantes :

(a) $A = \{(1, i), 2 \leq i \leq n\}$; (b) $B = \{(i, i+1), 1 \leq i \leq n-1\}$; (c) $C = \{(1, 2), (1, 2, \dots, n)\}$.

3.3

Montrer que toutes les transpositions sont conjuguées. Dédurre de la question précédente qu'il existe au plus deux morphismes $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{C}^*$ (ce sont le morphisme trivial et la signature).

3.4

Soit $\sigma = (3, 6)(7, 9)(2, 5)(4, 7)(6, 8)(1, 4)$ dans \mathcal{S}_9 .

- Est-ce que σ peut être engendré par moins de 6 transpositions ?
- Quel est l'ordre de σ ?
- Quel est l'ordre maximal d'un élément de \mathcal{S}_9 ?

3.5

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_6$.

- Écrivez σ comme produit de cycles disjoints et calculer $|\langle \sigma \rangle|$.
- Soit $\tau \in \mathcal{S}_6$ telle que $\tau\sigma = \sigma\tau$. Prouvez que $\tau(5) = 5$ et que $\tau(\{1, 4\}) = \{1, 4\}$.
- Prouvez que $\tau = \sigma^i$ pour $i \in \mathbb{N}$.

3.6 Orbites

- Soit n un entier non nul, soit $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et soit G un sous-groupe de \mathcal{S}_n . On note \sim la relation définie sur X par : $i \sim j$ s'il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(i) = j$. Montrer que \sim est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences sont appelées les *orbites* de G .
- Soit G un sous-groupe de \mathcal{S}_4 d'indice 4 (c'est-à-dire que $|\mathcal{S}_4|/|G| = 4$). En étudiant les orbites de G , montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $G = \{\sigma \in \mathcal{S}_4, \sigma(i) = i\}$.

3.7 Sous-groupes distingués

Le but de cette section est d'étudier le fait que $K \triangleleft H$ et $H \triangleleft G \not\Rightarrow K \triangleleft G$.

On considère le groupe $G = \mathcal{A}_4$.

- a) Montrer que $H = \langle id, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \rangle$ est un sous-groupe distingué dans G .
- b) Montrer que $K = \langle id, (12)(34) \rangle$ est un sous-groupe distingué dans H .
- c) Montrer que K est un sous-groupe de G qui n'est pas distingué dans G .
- d) Calculer tous les sous-groupes de \mathcal{A}_4 .