Fiche de TD 5

Polynômes (suite)

Exercice 1 Polynômes à valeurs entières

Si $k \in \mathbb{N}$, on pose $\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\binom{X+1}{k} - \binom{X}{k} = \binom{X}{k-1}$.

b) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\binom{X}{k}(n) \in \mathbb{Z}$ †

c) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on pose $\Delta f : n \mapsto f(n+1) - f(n)$ et on définit par récurrence $\forall\, k \geqslant 1$, $\Delta^k f = \Delta\Delta^{k-1} f$.

Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est polynomiale de degré d en n si et seulement si $\Delta^{d+1} f = 0$. *Indication. Raisonner par récurrence sur $d \geqslant 0$.*

d) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} k^d$ est un polynôme de degré $d+1$ en n.

e) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré d. On suppose que

$$f(0),\ f(1),\ ...,\ f(d) \in \mathbb{Z}\ .$$

Montrer qu'il existe des entiers $c_0, ..., c_d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$f = c_0 \binom{X}{0} + ... + c_d \binom{X}{d}\ .$$

En particulier $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$. ‡ *Indication. Vérifier que $\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d$, $c_k = \Delta^k f(0)$.*

f) Trouver les coefficients pour $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-\frac{1}{2})(n-1)}{3},\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \binom{n}{2}^2\ .$$

g) On suppose que f est un polynôme réel ou complexe. On suppose que

$$\forall\, n >> 0,\ f(n) \in \mathbb{Z}$$

Montrer que $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout n. *Indication. Raisonner avec $f(X+a)$ où a est un entier assez grand !*

Exercice 2 Méthode de Cardan pour les équations de degré 3

Soient $p, q \in \mathbb{C}$. Soit $P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$.

a) Vérifier que si u, v vérifient $\begin{cases} u^3 + v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{cases}$, alors $x = u + v$ est racine du polynôme P.

†. bien que $\binom{X}{k} \notin \mathbb{Z}[X]$ si $k \geqslant 2$.

‡. Et si f est définie et polynomiale sur $\mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $f(n) \in \mathbb{Z}$.

b) Soient u, v des racines cubiques :

$$u := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \; v := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

telles que $uv = -\frac{p}{3}$. Justifier que c'est possible et déduire de la question précédente que les racines de P sont : $u+v$, $ju + j^2 v$, $j^2 u + jv$.

c) **Applications.** En déduire les formules suivantes :

$$\sqrt[3]{\frac{-1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}} \text{ est l'unique racine réelle de } X^3 + X + 1$$

$$2\cos\frac{2\pi}{9} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2\cos\frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+21i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{7-21i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

Indication. Utiliser la formule $2\cos(3x) = (2\cos x)^3 - 3.(2\cos x)$.

Exercice 3 Méthode d'Euler pour les équations de degré 4

Soient $p, q, r \in \mathbb{C}$. Soit $P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r \in \mathbb{C}[X]$.

a) Vérifier que si u, v, w vérifient :

$$(*) \begin{cases} u + v + w = -p/2 \\ \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w} = -q/8 \\ -(u+v+w)^2 + 4(uv + uw + vw) = -r \end{cases}$$

alors $x = \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$ est racine du polynôme P.

b) En déduire que si u, v, w sont les trois racines du polynôme :

$$T^3 + \frac{p}{2}T^2 + \left(\frac{(p/2)^2 - r}{4}\right)T - \left(\frac{q}{8}\right)^2$$

et si on choisit des racines carrées telles que $\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w} = -q/8$ *(justifier que c'est possible)*, alors les racines du polynôme P sont :

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}\,,\; \sqrt{u} - \sqrt{v} - \sqrt{w}\,,\; -\sqrt{u} + \sqrt{v} - \sqrt{w}\,,\; -\sqrt{u} - \sqrt{v} + \sqrt{w} \;.$$

c) **Application.** *Seulement pour les calculateurs motivés :* trouver les racines du polynôme $X^4 - X - 1$.