Fiche de TD 4
Polynômes

Exercice 1 Soient $A, B \in \mathbb{Q}[X]$. Trouver $D = \mathrm{pgcd}(A, B)$ et $Q = \mathrm{ppcm}(A, B)$ pour les polynômes suivants. Trouver aussi à chaque fois $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = D$:

a) $A = X^5 + 1$ et $B = X^3 + X + 1$.

b) $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + 1$.

Exercice 2 Démontrer que pour tout corps K, l'anneau des polynômes $K[X]$ a une infinité de polynômes unitaires irréductibles.

Exercice 3 Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$:

$$X^4 + 1,\ X^6 + X^3 + 1,\ X^3 - 3X + 1 \ .$$

Exercice 4 Trouver un polynôme rationnel de degré 4 qui annule $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Le factoriser sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Polynômes cyclotomiques

Soit $n \geqslant 1$. On pose

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ \mathrm{pgcd}(k,n)=1}}^{n} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}) \ .$$

a) Calculer $\Phi_1(X)$, $\Phi_2(X)$, $\Phi_3(X)$, $\Phi_4(X)$, $\Phi_5(X)$.

b) Montrer que $\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$.

c) En déduire par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

d) En déduire aussi la formule : $\Phi_n(X) = \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$ où μ est la fonction de Möbius.

Exercice 6 Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\mathrm{pgcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^{\mathrm{pgcd}(m,n)} - 1$$

a) en factorisant en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$;

b) avec l'algorithme d'Euclide.

Exercice 7 Polynômes de Tchebychev

a) On définit par récurrence :

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \in \mathbb{Z}[X] \ .$$

Calculer $T_2(X)$, $T_3(X)$, $T_4(X)$.

b) Montrer que $\forall\, n \geqslant 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos nt$ et en déduire les racines de T_n.

c) En déduire que $\forall\, m, n \geqslant 1$, $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$.

d) Montrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, t \in \mathbb{R},\ \sin nt = U_n(\cos t)\sin t$$

où si $n \geqslant 1$, $U_n(X) = \frac{T_n'(X)}{n}$.

Exercice 8 Critère d'Eisenstein

a) Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. Soit p un nombre premier. Montrer que si p divise tous les coefficients du polynôme AB, alors p divise tous les coefficients de A ou bien tous les coefficients de B.

Indication. Vérifier que dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, $\overline{A}\,\overline{B} = 0 \Rightarrow \overline{A}$ *ou* $\overline{B} = 0$.

b) Si $P \in \mathbb{Z}[X]$, on note $c(P)$ le pgcd de tous les coefficients du polynôme P. En déduire le lemme de Gauss suivant.

Lemme. Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. On a $c(AB) = c(A)c(B)$.

c) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que :

(i) $p | a_0, ..., a_{n-1}$;

(ii) $p \not| a_n$;

(iii) $p^2 \not| a_0$.

Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

d) En déduire pour tout $n \geqslant 1$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$.