Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – analyse réelle
examen final
vendredi 22 décembre 2023
durée 2H
CORRECTION

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$.

En étudiant les variations de P, montrer que P a 2 racines réelles < 0 et une racine réelle > 0.

$P'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ doc $P'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant x_1$ ou $x \geqslant x_2$ où $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$. On en déduit le tableau de variations de la fonction P.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P(x_1) > 0$	$\searrow$	$P(x_2) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

En effet, $x_1 < -1 < 0 < x_2 < 0 \Rightarrow P(x_1) > P(-1) = 1 > 0$ et $0 > -1 = P(0) > P(x_2)$.

Donc il existe trois racines z_1, z_2, z_3 avec :

$$z_1 < x_1 < z_2 < x_2 < z_3$$

comme de plus, $x_1 < 0 < x_2$, $P(x_1) > 0 = P(z_2) > P(0) = -1 \Rightarrow z_2 < 0$.

donc $z_1, z_2 < 0$ et $z_3 > x_2 > 0$.

Exercice 2 Donner le développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\frac{1}{\cos x}$. $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)}$.

On fait une « *division selon les puissances croissantes* ».

$$\begin{array}{r|l} 1 & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720} \\ \cline{2-2} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720} & 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720} \\ \cline{1-1} \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720} & \\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{48} & \\ \cline{1-1} \frac{5x^4}{24}-\frac{14x^6}{720} & \\ \frac{5x^4}{24}-\frac{5x^6}{48} & \\ \cline{1-1} \frac{61x^6}{720} & \end{array}$$

d'où $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + o(x^6)$.

Exercice 3 Soit

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{2}{3}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln \left|1 + \frac{2}{3x}\right| & \text{si } x \neq 0, -\frac{2}{3} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$.

La fonction f est dérivable en tout $x \neq 0, -\frac{2}{3}$. De plus au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} = x \ln\left(1 + \frac{2}{3x}\right) &= x\left(\ln(3x+2) - \ln(3x)\right) \\ &= x(\ln 2 - \ln 3 - \ln x + o(1)) \\ &= -x \ln x + x(\ln 2 - \ln 3) + o(x) \\ &= o(1) \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$. Donc f est dérivable aussi en 0 et $f'(0) = 0$.

b) La fonction f est-elle $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$?

La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{2}{3}\}$ et

$$\forall\, x \neq 0, -\frac{2}{3},\ f'(x) = (x^2(\ln(3x+2) - \ln(3x)))'$$

$$= 2x(\ln(3x+2) - \ln(3x)) + x^2(\frac{3}{3x+2} - \frac{3}{3x})$$
$$= -x\ln x + O(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0 = f'(0)$$

donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$.

c) i) Montrer que lorsque $|x| \to +\infty$, f admet un développement asymptotique de la forme

$$f(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

où a, b, c, d sont des constantes que l'on déterminera.

En effet, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$ au voisinage de 0. Donc comme $\frac{2}{3x} \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, lorsque $|x| \to +\infty$,

$$f(x) = x^2(\frac{2}{3x} - \frac{2}{9x^2} + \frac{8}{81x^3} - \frac{4}{81x^4} + o(\frac{1}{x^4}))$$
$$= \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + \frac{8}{81x} - \frac{4}{81x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \ .$$

ii) En déduire que f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$.

Soit d la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$.

Comme $f(x) - y(x) = \frac{8}{81x} - \frac{4}{81x^2} + o(\frac{1}{x^2})) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} = 0$, la droite d est une asymptote oblique de f.

iii) Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$?

$f(x) - y(x) = \frac{8}{81x} + o(\frac{1}{x}) \Rightarrow x(f(x) - y(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{81} > 0$, le graphe de f est au-dessus de la droite d au voisinage de $+\infty$. De même, le graphe est en-dessous de l'asymptote au voisinage de $-\infty$.

iv) Que peut-on dire au voisinage de $x = -\frac{2}{3}$?

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{2}{3}\\ x\neq-\frac{2}{3}}} f(x) = -\infty$, le graphe de f a une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{2}{3}$ au voisinage de $-\frac{2}{3}$.

d) Pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$u_n = n^2 \ln\left(1 + 2\frac{(-1)^n}{3n}\right) + (-1)^{n+1}\frac{2}{3}n + \frac{2}{9} \ .$$

En utilisant la question c)i), étudier la nature de la série $\sum_n u_n$ (convergence absolue, convergence, divergence, divergence grossière).

En appliquant c i) à $x = (-1)n$, on trouve

$$u_n = f((-1)^n n) - \left(\frac{2}{3}(-1)^n n - \frac{2}{9}\right)$$

$$= \frac{8}{81}\frac{(-1)^n}{n} - \frac{4}{81}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Comme les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ convergent, $\sum_n u_n$ converge. De plus

$$|u_n| = \left|\frac{8}{81}\frac{(-1)^n}{n} - \frac{4}{81}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right|$$

$$\sim \frac{8}{81}\frac{1}{n}$$

la série $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ étant de même nature que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Donc $\sum_n u_n$ est semiconvergente.

Exercice 4 a) Montrer que $\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < x\cos x < x$.

$\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \cos x < 1 \Rightarrow 0 < x\cos x < x$.

b) Soit $0 < u_1 < \frac{\pi}{2}$. On définit par récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n \cos u_n\ .$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. On a $0 < u_1 < \frac{\pi}{2}$ et si $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$, alors

$$0 < u_{n+1=u_n\cos u_n} < u_n < \frac{\pi}{2}$$

d'où $\forall\, n \geqslant 1$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$ par récurrence sur $n \geqslant 1$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0. Soit $n \geqslant 1$. Comme $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$, $u_{n+1} = u_n \cos u_n < u_n$ donc la suite est décroissante et minorée (par 0). Donc $\lim_n u_n = l$ existe et $l \geqslant 0$. Comme $x \mapsto x\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_n u_{n+1} = \lim_n u_n \cos u_n = l\cos l = l\ .$$

On a $0 \leqslant l \leqslant u_1 < \frac{\pi}{2}$. donc $l = l\cos l \Rightarrow l(1 - \cos l) \Rightarrow l = 0$.

d) Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2\cos^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

et en déduire $\lim_n \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x^2}(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^{-2} - \frac{1}{x^2}\\ &= \frac{1}{x^2}\left(1 + x^2 + o(x^2) - 1\right)\\ &= 1 + o(1)\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2\cos^2 x} - \frac{1}{x^2} = 1$. Comme $\lim u_n = 0$, on a

$$\lim_n \frac{1}{u_n^2\cos^2 u_n} - \frac{1}{u_n^2} = \lim_n \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = 1 \ .$$

e) Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites à termes réels > 0. On suppose que

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \ .$$

Montrer que si $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_n$ diverge alors

$$\sum_{k=1}^n a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n b_k \ .$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que

$$\forall\, n \geqslant N,\ (1-\epsilon)a_n \leqslant b_n \leqslant (1+\epsilon)a_n$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geqslant N,\ (1-\epsilon)\sum_{k=N}^n a_k \leqslant \sum_{k=N}^n b_k \leqslant (1+\epsilon)\sum_{k=N}^n a_k$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} &\leqslant \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} + \frac{\sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k}\\ &\leqslant \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} + \frac{\sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=N}^n a_k}\\ &\leqslant \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} + (1+\epsilon)\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} &= \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \geqslant \frac{\sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \\ &\geqslant (1-\epsilon)\frac{\sum_{k=N}^n a_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \\ &= (1-\epsilon)\left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\sum_{k=1}^n a_k}\right) \ .\end{aligned}$$

Or, N étant fixé, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$, on trouve :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N-1} b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{\sum_{k=1}^n a_k} = 0$$

donc il existe $N_1 \geqslant N$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_1,\ 1-2\epsilon \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \leqslant 1+2\epsilon \ .$$

C'est vrai pour tout $\epsilon > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} = 1$ et

$$\sum_{k=1}^n b_k \sim \sum_{k=1}^n a_k \ .$$

f) Déduire des deux questions précédentes un équivalent de la suite $\left(\frac{1}{u_n^2}\right)_n$ et un équivalent de la suite $(u_n)_n$. On a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \sim 1 \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \sim \sum_{k=1}^n 1 = n\end{aligned}$$

(car $\sum_{k=1}^n 1 = n$ diverge)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_1^2} \sim n \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} \sim n \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n^2} \sim n-1 \sim n \\ &\Rightarrow u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \ .\end{aligned}$$