Licence de mathématiques

L3, parcours « enseignement » – analyse réelle

examen final

vendredi 22 décembre 2023

durée 2H

Le barème est indicatif.

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$.

En étudiant les variations de P, montrer que P a 2 racines réelles < 0 et une racine réelle > 0. **3pts**

Exercice 2 Donner le développement limité à l'ordre 6 en 0 de $\frac{1}{\cos x}$. **3pts**

Exercice 3 Soit

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{2}{3}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \ln\left|1 + \frac{2}{3x}\right| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. **2pts**

b) La fonction f est-elle $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$? **1pt**

c) i) Montrer que lorsque $|x| \to +\infty$, f admet un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$ de la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

où a, b, c, d sont des constantes que l'on déterminera. **2pts**

ii) En déduire que f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$. **1pt**

iii) Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$? **2pts**

iv) Que peut-on dire du graphe de f au voisinage de $x = -\frac{2}{3}$? **1pt**

d) Pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$u_n = n^2 \ln\left(1 + 2\frac{(-1)^n}{3n}\right) + (-1)^{n+1}\frac{2}{3}n + \frac{2}{9} \ .$$

En utilisant la question c)i), étudier la nature de la série $\sum_n u_n$ (convergence absolue, convergence, divergence, divergence grossière). **2pts**

Exercice 4 a) Montrer que $\forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < x \cos x < x$. **1pt**

b) Soit $0 < u_1 < \frac{\pi}{2}$. On définit par récurrence

$$\forall\, n \geqslant 1,\ u_{n+1} = u_n \cos u_n \ .$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$. **1pt**

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0. **2pt**

d) Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2\cos^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

et en déduire $\lim_n \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. **2pts**

e) Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites à termes réels > 0. On suppose que

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \ .$$

Montrer que si $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_n$ diverge alors

$$\sum_{k=1}^n a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n b_k \ .$$

4pts

f) Déduire des deux questions précédentes un équivalent de la suite $\left(\frac{1}{u_n^2}\right)_n$ et un équivalent de la suite $(u_n)_n$. **3pts**