Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – arithmétique et groupes
contrôle partiel du jeudi 12 octobre 2023
1h30

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 a) Donner un exemple d'application injective $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Justifier votre réponse.
Posons $f(r) = (p, q)$ si $r = p/q$ avec $p \in Z$, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $pgcd(p, q) = 1$.

b) Donner un exemple d'application injective $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Justifier votre réponse

c) Existe-t-il une application injective $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$?

a) Posons $f(r) = (p,q)$ si $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}_{>0}$, $pgcd(p,q) = 1$. Alors $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est injective.

En effet, si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ avec $p,p' \in \mathbb{Z}$, $q,q' \in \mathbb{Z}_{>0}$, $pgcd(p,q) = pgcd(p',q') = 1$,
alors $pq' = p'q \Rightarrow$ (d'après le lemme de Gauss) $q \mid q'$ et $q' \mid q \Rightarrow q' = \pm q$ Or $q, q' > 0$
donc $q = q'$ et $pq' = p'q \Rightarrow p = p'$.

b) Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $m \mapsto \begin{cases} 2m & \text{si } m \geq 0 \\ -2m-1 & \text{si } m < 0 \end{cases}$. L'application g est bijective de réciproque $g^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$

Or l'application $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k, \ell \mapsto 2^k 3^\ell$ est injective car 2, 3 sont des nombres premiers distincts. Donc l'application $h : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m, n \mapsto 2^{g(m)} 3^{g(n)}$ est injective.

En effet, $h(m,n) = h(m',n') \Rightarrow 2^{g(m)}3^{g(n)} = 2^{g(m')}3^{g(n')}$
$\Rightarrow \begin{cases} g(m) = g(m') \\ g(n) = g(n') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = m' \\ n = n' \end{cases}$

c) L'application $h\circ f \begin{cases} \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \\ r \mapsto h(f(r)) \end{cases}$ est injective comme composée d'applications injectives

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$(*) \begin{cases} x &= 1\,[11] \\ x &= 2\,[12] \\ x &= 3\,[13] \end{cases}$$

On pose $x = 1 + 11k$, $k \in \mathbb{Z}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+11k = 2\,[12] \\ 1+11k = 3\,[13] \end{cases}$

Or dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $1+11k = 2\,[12]$
$\Leftrightarrow 1 - k = 2\,[12] \Rightarrow k = -1\,[12]$

Posons $k = -1 + 12\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

$(*) \Leftrightarrow 1 + 11(-1+12\ell) = 3\,[13]$

Or dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $1 + 11(-1+12\ell) = 3\,[13] \Leftrightarrow 1 - 2(-1-\ell) = 3\,[13] \Rightarrow 2\ell = 0\,[13]$
$\Rightarrow \ell = 0\,[13]$ car $pgcd(2,13) = 1$

Donc $\ell = 13m$, $m \in \mathbb{Z}$. D'où $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 11k, & k \in \mathbb{Z} \\ k = -1 + 12\ell, & \ell \in \mathbb{Z} \\ \ell = 13m, & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1 + 11(-1 + 12(13m)), m \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = -10 + \underbrace{11.12.13}_{1716} m$, $m \in \mathbb{Z}$

Exercice 3 a) Le nombre 2023 est-il premier ?

NON car $2023 = 7 \times 17^2$

b) Trouver le pgcd de 2023 et 3202, et donner toutes les solutions de

$$x, y \in \mathbb{Z},\ 2023x + 3202y = 1\ .$$

c) Quel est le ppcm de 2023 et 3202.

b) Algorithme d'Euclide.

$3202 = 2023 + 1179$
$2023 = 1179 + 844$
$1179 = 844 + 335$
$844 = 335 \times 2 + 174$
$335 = 174 + 161$
$174 = 161 + 13$
$161 = 13 \times 12 + 5$
$13 = 5 \times 2 + 3$
$5 = 3 + 2$
$3 = 2 + \boxed{1}$ donc $\mathrm{pgcd}(3202, 2023) = 1$

On a $1 = 3 - 2$
$= 3 - (5-3) = 3 \times 2 - 5$
$= (13 - 5 \times 2) \times 2 - 5 = 13 \times 2 - 5 \times 5$
$= 13 \times 2 - 5 \times (161 - 13 \times 12) = 13 \times 62 - 5 \times 161$
$= (174 - 161) \times 62 - 5 \times 161 = 174 \times 62 - 161 \times 67$
$= 174 \times 62 - (335 - 174) \times 67$
$= 174 \times 129 - 335 \times 67$
$= (844 - 335 \times 2) \times 129 - 335 \times 67 = 844 \times 129 - 335 \times 325$
$= 844 \times 129 - (1179 - 844) \times 325 = 844 \times 454 - 1179 \times 325$
$= (2023 - 1179) \times 454 - 1179 \times 325$
$= 2023 \times 454 - 1179 \times 779$
$= 2023 \times 454 - (3202 - 2023) \times 779$
$= 2023 \times 1233 - 3202 \times 779$

$2023x + 3202y = 1 \iff 2023(x - 1233) = -3202(y + 779)$
On pgcd(2023, 3202) = 1 donc il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que
$x - 1233 = 3202k,\ y + 779 = 2023l$.
$2023x + 3202y = 1 \iff 2023 \times 3202k = -3202 \times 2023l$
$\iff l = -k$.
Donc $2023x + 3202y = 1 \iff \begin{cases} x = 1233 + 3202k \\ y = -779 - 2023k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

c) Comme $\mathrm{pgcd}(2023, 3202) = 1$, $\mathrm{ppcm}(2023, 3202) = 2023 \times 3202$

Exercice 4 Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 11 ?

D'après le petit théorème de Fermat, $2^{10} = 1\ [11]$

donc $2^{2023} = 2^{10 \times 202 + 3} = 2^3\ [11] = 8\ [11]$

Donc le reste est 8.

Exercice 5 Déterminer tous les éléments de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ et leurs inverses (pour la multiplication).

Comme $24 = 2^3 \times 3$, $k \in (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^* \iff \mathrm{pgcd}(24, k) = 1 \iff 2 \nmid k, 3 \nmid k$

donc $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^* = \{\pm\bar{1}, \pm\bar{5}, \pm\bar{7}, \pm\overline{11}\}$

et dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\overline{-1}^{-1} = \overline{-1}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{5}$, $\overline{-5}^{-1} = \overline{-5}$, $\bar{7}^{-1} = \bar{7}$, $\overline{-7}^{-1} = \overline{-7}$
$\overline{11}^{-1} = \overline{11}$, $\overline{-11}^{-1} = \overline{-11}$.

Exercice 6 Soit l'équation diophantienne

$$x, y \in \mathbb{N},\ 3^x - 2^y = 1 \qquad (E)$$

a) Trouver deux couples (x, y) solutions de (E).

b) Montrer que $3^x = 1 \bmod 4 \Rightarrow x$ pair. En déduire que si $y \geqslant 2$, alors $x = 2x'$ pour un certain entier x'.

c) Montrer que $3^{2x'} - 1 = 2^y \Rightarrow (3^{x'} - 1)(3^{x'} + 1) = 2^y$ et en déduire que si $y \geqslant 2$ dans (E), alors $3^x = 9$.

d) Déterminer toutes les solutions de (E).

e) Résoudre $2^x - 3^y = 1$, $x, y \in \mathbb{N}$. *Indication. Raisonner* $\bmod 8$ *si* $x \geqslant 3$.

a) $3-2=1$, $3^2-2^3=1$ donc $(1,1)$ et $(2,3)$ sont solutions

b) $3^2 = 1\,[4]$ donc $3^x\,[4]$ ne dépend que de $x\,[2]$.
$3^x = 3\,[4]$ si $x=1[2]$, $3^x = 1[4]$ si $x = 0[2]$

Si $y \geqslant 2$, $3^x - 2^y = 1 \Rightarrow 3^x = 1 + 2^y \Rightarrow 3^x = 1[4] \Rightarrow x = 2x'$ pour $x' \in \mathbb{Z}$.
(car $4 | 2^y$)

c) $3^{2x'} - 1 = (3^{x'}-1)(3^{x'}+1)$. Si $y \geqslant 2$, $3^x - 2^y = 1 \Rightarrow x = 2x'$ pour un $x' \in \mathbb{N}$
Alors $(3^{x'}-1)(3^{x'}+1) = 2^y$. Comme $3^{x'}$ impair $3^{x'} = \pm 1 \bmod 4$.

1er cas $3^{x'} = 1[4]$. Il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $3^{x'} = 1+4m$. $(3^{x'}-1)(3^{x'}+1) = 4m(2+4m) = 8m(2m+1) = 2^y$
$\Rightarrow 2m+1$ est une puissance de 2 $\Rightarrow 2m+1 = 1 \Rightarrow m = 0$
$\Rightarrow 3^{x'} = 1 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = 0$ Absurde

2e cas $3^{x'} = -1[4]$. Il existe $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ tel que $3^{x'} = -1+4m$
$(3^{x'}-1)(3^{x'}+1) = (-2+4m)4m = 8(2m-1) = 2^y \Rightarrow 2m-1 = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x' = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 3^x = 9$

d) Si $y \geqslant 2$, alors $x = 2 \Rightarrow y = 3$.
Si $y < 2$, alors $y = 0$ ou 1. Si $y = 0$, $3^x - 2^y = 3^x - 1 \neq 1$ $(\forall x \in \mathbb{N})$
Si $y = 1$, $3^x - 2^y = 3^x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
Donc les solutions de (E) sont $(1,1)$ et $(2,3)$.

e) Si $x \geqslant 3$, $8 | 2^x$ donc $2^x - 3^y = 1 \Rightarrow 3^y = -1[8]$
Or $3^2 = 1[8]$ donc $3^y = \begin{cases} 3[8] & \text{si } y = 1[2] \\ 1[8] & \text{si } y = 0[2] \end{cases}$ donc $\forall y \in \mathbb{N}$, $3^y \neq -1[8]$
Donc $2^x - 3^y = 1 \Rightarrow x < 3$. Si $x = 0$ $2^0 - 3^y = 1$ n'a pas de solution
Si $x = 1$ $2 - 3^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$
Si $x = 2$ $2^2 - 3^y = 1 \Leftrightarrow y = 1$.
Voici les solutions : $(1,0)$, $(2,1)$.