

Licence de mathématiques  
L3, parcours « enseignement » – arithmétique et groupes  
contrôle partiel du jeudi 12 octobre 2023  
**1h30**

*Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.*

- Exercice 1** a) Donner un exemple d'application injective  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Justifier votre réponse. 1
- b) Donner un exemple d'application injective  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Justifier votre réponse. 3
- c) Existe-t-il une application injective  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ ? 1

**Exercice 2** Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :

$$\begin{cases} x = 1 [11] \\ x = 2 [12] \\ x = 3 [13] \end{cases} \quad \text{3}$$

- Exercice 3** a) Le nombre 2023 est-il premier? 1
- b) Trouver le pgcd de 2023 et 3202. et donner toutes les solutions de

$$x, y \in \mathbb{Z}, 2023x + 3202y = 1. \quad \text{3}$$

- c) Quel est le ppcm de 2023 et 3202. 1

**Exercice 4** Quel est le reste de la division euclidienne de  $2^{2023}$  par 11? 2

**Exercice 5** Déterminer tous les éléments de  $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$  et leurs inverses (pour la multiplication). 2

**Exercice 6**

$$(E) \quad x, y \in \mathbb{N}, 3^x - 2^y = 1$$

- a) Trouver deux couples  $(x, y)$  solutions de  $(E)$ . 1
- b) Montrer que  $3^x = 1 \pmod{4} \Rightarrow x$  pair. En déduire que si  $y \geq 2$ , alors  $x = 2x'$  pour un certain entier  $x'$ . 2
- c) Montrer que  $3^{2x'} - 1 = 2^y \Rightarrow (3^{x'} - 1)(3^{x'} + 1) = 2^y$  et en déduire que si  $y \geq 2$  dans  $(E)$ , alors  $3^x = 9$ . 2
- d) Déterminer toutes les solutions de  $(E)$ . 1
- e) Résoudre  $2^x - 3^y = 1, x, y \in \mathbb{N}$ . *Indication. Raisonner mod 8 si  $x \geq 3$ .* 2