

Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – arithmétique et groupes
contrôle partiel du jeudi 12 octobre 2023
1h30

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

- Exercice 1** a) Donner un exemple d'application injective $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Justifier votre réponse. 1
- b) Donner un exemple d'application injective $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Justifier votre réponse. 3
- c) Existe-t-il une application injective $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$? 1

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{Z} :

$$\begin{cases} x = 1 [11] \\ x = 2 [12] \\ x = 3 [13] \end{cases} \quad \text{3}$$

- Exercice 3** a) Le nombre 2023 est-il premier? 1
- b) Trouver le pgcd de 2023 et 3202. et donner toutes les solutions de

$$x, y \in \mathbb{Z}, 2023x + 3202y = 1. \quad \text{3}$$

- c) Quel est le ppcm de 2023 et 3202. 1

Exercice 4 Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{2023} par 11? 2

Exercice 5 Déterminer tous les éléments de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$ et leurs inverses (pour la multiplication). 2

Exercice 6

$$(E) \quad x, y \in \mathbb{N}, 3^x - 2^y = 1$$

- a) Trouver deux couples (x, y) solutions de (E) . 1
- b) Montrer que $3^x = 1 \pmod{4} \Rightarrow x$ pair. En déduire que si $y \geq 2$, alors $x = 2x'$ pour un certain entier x' . 2
- c) Montrer que $3^{2x'} - 1 = 2^y \Rightarrow (3^{x'} - 1)(3^{x'} + 1) = 2^y$ et en déduire que si $y \geq 2$ dans (E) , alors $3^x = 9$. 2
- d) Déterminer toutes les solutions de (E) . 1
- e) Résoudre $2^x - 3^y = 1, x, y \in \mathbb{N}$. *Indication. Raisonner mod 8 si $x \geq 3$.* 2