Donner une bijection $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0. \end{cases}$
C'est une bijection en effet voici la réciproque :

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Il est en effet facile de vérifier que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ *et* $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{>0}$.

On pose $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{>0}$, $(m, n) \mapsto 2^m(2n+1)$.
C'est bien une bijection. En effet, c'est **surjectif** :
Si $l \in \mathbb{N}_{>0}$, alors l se factorise en produit de nombres premiers :

$$l = p_1 \ldots . p_r$$

(pour un $r \geqslant 0$). Parmi les p_i, certains sont égaux à 2 les autres sont impairs. Donc

$$l = \prod_{\substack{i=1 \\ p_i=2}}^{r} p_i \prod_{\substack{i=1 \\ p_i \text{impair}}}^{r} p_i \ .$$

Il existe $m \geqslant 0$ tel que $2^m = \prod_{\substack{i=1 \\ p_i=2}} p_i$ et comme le produit de nombres impairs est un nombre impair, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$2n + 1 = \prod_{\substack{i=1 \\ p_i \text{impair}}}^{r} p_i \ .$$

Donc $l = 2^m(2n+1) = \varphi(m, n)$.
C'est **injectif :**
si $2^{m'}(2n'+1) = 2^m(2n+1)$ avec $m, m', n, n' \in \mathbb{N}$, alors on montre que $m = m'$ et $n = n'$. Supposons par exemple $m \leqslant m'$. Alors

$$2^{m'-m}(2n'+1) = 2n+1$$

donc comme $2n+1$ est impair, ce n'est pas divisible par 2 donc forcément $m'-m=0$ *i.e.* $m'=m$. On a donc aussi

$$2n'+1=2n+1 \Rightarrow n'=n \ .$$

On peut raisonner de même si $m \geqslant m'$.

Une bijection $\mathscr{P}_{finie}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$.

On note $\mathscr{P}_{finie}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Si $F=\{a_1<...<a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ est une partie finie, posons

$$\varphi(F)=2^{a_1}+...+2^{a_n}=\sum_{a\in F} 2^a \ .$$

Montrons que $\varphi : \mathscr{P}_{finie}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ est une bijection !

C'est **injectif.**

Démontrons par récurrence sur $p=\max\{m,n\}$ que

(H_p) Si $\{a_1<...<a_m\},\{b_1<...<b_n\} \subseteq \mathbb{N}$ et si $2^{a_1}+....+2^{a_m}=2^{b_1}+...+2^{b_n}$ alors $m=n$ et $\forall\, i,\ a_i=b_i$.

Si $p=\max\{m,n\}=0$, alors $n=m=0$ et

$$\{a_1<...<a_m\}=\{b_1,...,b_n\}=\varnothing$$

donc l'hypothèse (H_0) est vraie

Soit $p\geqslant 0$. Supposons que H_k est vraie pour tout entier $0\leqslant k\leqslant p\geqslant 0$. Nous allons montrer que l'hypothèse (H_{p+1})est vraie aussi.

Soient $\{a_1<...<a_m\}$ et $\{b_1<...<b_n\}$ deux parties finies de $\mathbb{N}$ telles que $\max\{m,n\}=p+1$ et telles que :

$$N=2^{a_1}+...+2^{a_m}=2^{b_1}+...+2^{b_n} \ .$$

Alors on a :

$$2^{a_m}\leqslant N\leqslant \sum_{i=0}^{a_m} 2^i$$

car $\{a_1<...<a_m\}\subseteq\{0,1,...,a_m\}$.

Donc :

$$2^{a_m}\leqslant N\leqslant 2^{a_m+1}-1$$

$$\Rightarrow 2^{a_m} \leqslant N < 2^{a_m+1}$$
$$\Rightarrow a_m \leqslant \frac{\ln N}{\ln 2} < a_m + 1$$
$$\Rightarrow a_m = \left\lfloor \frac{\ln N}{\ln 2} \right\rfloor$$

la partie entière de $\frac{\ln N}{\ln 2}$.

De même, on a aussi :

$$b_n = \lfloor \frac{\ln N}{\ln 2} \rfloor$$
$$\Rightarrow b_n = a_m \ .$$

On peut donc simplifier :

$$2^{a_1} + ... + 2^{a_{m-1}} = 2^{b_1} + ... + 2^{b_{n-1}} \ .$$

Comme $\max\{m-1, n-1\} = \max\{m, n\} - 1 = p$, on a par hypothèse de récurrence :

$$m - 1 = n - 1, \forall\, 0 \leqslant i \leqslant m-1, a_i = b_i$$
$$\Rightarrow m = n \text{ et } \forall\, 0 \leqslant i \leqslant m,\ a_i = b_i \ .$$

Cela termine la récurrence.

Soit E un ensemble, alors il n'existe pas d'application injective $\mathscr{P}(E) \to E$ ni d'application surjective $E \to \mathscr{P}(E)$.

Démonstration par l'absurde. Si $\phi : \mathscr{P}(E) \to E$ était une application injective, alors on pourrait considérer l'ensemble

$$A = \{x \in E \ : \ x \notin \phi^{-1}(\{x\})\} \ .$$

alors $A \subseteq E$ et on a :

$$\phi(A) \in A \Rightarrow \phi(A) \notin \phi^{-1}(\{\phi(A)\}) = A$$

(car ϕ est injective) absurde ! Donc on a

$$\phi(A) \notin A = \phi^{-1}(\{\phi(A)\})$$

$$\Rightarrow \phi(A) \in A$$

absurde !

Contradiction. Donc ϕ *ne saurait être injective.*

Si $\psi : E \to \mathscr{P}(E)$ était une application surjective, alors on pourrait considérer l'ensemble :

$$A = \{x \in E \ : \ x \notin \psi(x)\} \ .$$

Il existerait alors un $y \in E$ tel que $\psi(y) = A$. Mais on aurait :

$$y \in A \Rightarrow y \notin \psi(y) = A$$

absurde ! et

$$y \notin A \Rightarrow y \in \psi(y) = A$$

absurde !

Donc ψ *ne saurait être surjective !*