À propos des fractions continues

Définition. Si $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ et $a_n \neq 0$, on pose

$$[a_0, ..., a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Proposition. Soient $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Si $a_n > 0$, alors :

$$[a_0, ..., a_n] = \frac{A_n}{B_n}$$

où

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} \text{ et } B_n = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}$$

Démonstration : On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 0$ en remarquant que :

$$[a_0, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, ..., a_n]}$$

et en développant le déterminant A_n par rapport à la première ligne! **Q.e.d.**

Théorème 0.1 *Supposons* $\forall\, i$, $a_i \in \mathbb{N}_{>0}$, *alors posons* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n := [a_0, ..., a_n]$.

i) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{2n} \leqslant x_{2n+1} \leqslant x_{2n-1} \leqslant ... \leqslant x_1$.

ii) $\lim_n x_{2n+1} - x_{2n} = 0$.

iii) *Les suites* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une même limite notée :*

$$[a_0, ..., a_n, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Démonstration :

i) La fonction
$$x \mapsto [a_0, a_1, x] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x}}$$
est strictement croissante. On en déduit par récurrence sur n que pour tout n pair, la fonction
$$[a_0, ..., a_n]$$
est strictement croissante en la variable a_n.
On a donc
$$[a_0, a_1, ..., a_{2n}] = [a_0, ..., \underbrace{[a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}]}_{>a_{2n-2}}] > [a_0, ..., a_{2n-2}] \ .$$
De même pour la suite aux indices impairs.
De plus,
$$x_{2n+1} = [a_0, ..., a_{2n}, a_{2n+1}] = [a_0, ..., \underbrace{[a_{2n}, a_{2n+1}]}_{>a_{2n}}] > [a_0, ..., a_{2n}] = x_{2n}$$
pour tout n.

ii) En développant les déterminants A_n et B_n par rapport à leur dernière colonne, on trouve :
$$A_n = a_n A_{n-1} + A_{n-2},\ B_n = a_n B_{n-1} + B_{n-2}$$
c-à-d avec des matrices :
$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ A_{n-2} & B_{n-2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_0 & B_0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} a_0 a_1 + 1 & a_1 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix}} \ .$$
En prenant le déterminant, on trouve :
$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1}$$

d'où la formule :

$$x_n - x_{n-1} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_n B_{n-1}} \ .$$

Puisque les a_i sont des entiers > 0, on a $B_n = a_n B_{n-1} + B_{n-2} \geqslant B_{n-1} + B_{n-2} \Rightarrow B_n \geqslant n-1$ (par récurrence sur n).

Donc $\lim_n B_n = +\infty$ et

$$\lim_n x_n - x_{n+1} = 0 \ .$$

Q.e.d.

Remarque. Le théorème reste vrai si on suppose seulement $\forall i,\ a_i \in \mathbb{N}$, $\forall i$ impair, $a_i > 0$.

Théorème 0.2 Une bijection entre les suites d'entiers naturels et les réels$\geqslant$ 0

L'application

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto [a_0, 1, a_1, 1, ..., 1, a_n, 1, ...] := \lim_n \frac{A_n}{B_n}$$

où

$$A_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \textit{et } B_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_n & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

est une bijection strictement croissante †.

†. On choisit l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *c-à-d* $(a_n) < (b_n)$ s'il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall\, 0 \leqslant i < k$, $a_i = b_i$ et $a_k < b_k$.

Démonstration : L'application est bien définie car la suite $[a_0, 1, ..., a_n, 1]$ est décroissante et minorée par a_0. De plus si tous les a_i sont nuls, $\underbrace{[0, 1, 0, 1, ..., 1]}_{2n \text{ chiffres}} = \frac{1}{n} \longmapsto_n 0$.

Voici la réciproque si $x \geqslant 0$.

Soit $x \geqslant 0$. On définit par récurrence. Soient $y_0 := x$ et $a_0 := E(x)$ †.

Si les entiers $a_0, ..., a_{n-1}$ sont définis tels que

$$[a_0, 1, ..., 1, a_{n-1}] \leqslant x < [a_0, 1, a_1, 1, ..., a_n, 1],$$

alors on choisit $y_n \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ tel que

$$[a_0, 1, ..., a_{n-1}, 1, y_n] = x$$

et on pose $a_n = E(y_n)$.

Par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$[a_0, 1, ..., 1, a_n] \leqslant x < [a_0, 1, a_1, 1, ..., a_n, 1]$$

$$\Rightarrow \lim_n [a_0, 1, ..., 1, a_n] = \lim_n [a_0, 1, ..., 1, a_n, 1] = x \ .$$

Q.e.d.

†. on note $E(x)$ le plus grand entier $\leqslant x$.