
Examen final

Vendredi 6 janvier 2022 16h00 à 18h00.

Aucune consultation de document papier ou électronique n'est acceptée durant l'épreuve. Le barème est approximatif. Il y a des exercices au verso.

Exercice 1(*3 points*) Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a ou de $a = \pm\infty$.

a) Rappeler la définition de l'équivalence de ces deux fonctions en a, (c'est-à-dire que signifie $f \sim_a g$?).

b) Montrer que $\exp(f) \sim_a \exp(g) \Leftrightarrow \lim_a (f - g) = 0$.

c) Est-ce que l'implication $(f \sim_a g) \Rightarrow (\exp(f) \sim_a \exp(g)\,)$ est vraie ?

Exercice 2(*4 point*) On définie $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $h : x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

a) Déterminer la limite $\ell = \lim_{x\to 0^+} h(x)$.

b) Déterminer la limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-\ell}{x}$

c) En déduire que la fonction suivante

$$\bar{h} : x \mapsto \begin{cases} h(x) & \text{si } x > 0 \\ x/3 - 1/2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (*4 point*) On considère la fonction suivante $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$f : x \mapsto x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)$$

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

b) En déduire l'existence d'une asymptote oblique.

c) Étudier la position du graphe de f par rapport à l'asymptote.

Exercice 4 (Extrait CAPES 2022, version simplifiée)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe* si $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \qquad (\star)$$

et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *concave* si $-f$ est convexe.

a) (*0.5 point*) Écrire une inégalité, analogue à $(\star)$, caractérisant une fonction concave sur I.

b) (*0.5 point*) Montrer que la fonction valeur absolue est convexe.

c) (*8 points*) **Pour le reste de cet exercice on fixe deux réels positifs $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$.**

On définit la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \ln(tx + (1 - t)y) - t\ln(x) - (1 - t)\ln(y)$$

c.1) Justifier que $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est k–fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g \in \mathcal{C}^k([0, 1], \mathbb{R})$).

c.2) Montrer que $g'(t) = \frac{x-y}{(tx+(1-t)y)} - \ln(x) + \ln(y)$.

c.3) Montrer que la fonction $g' : t \mapsto g'(t)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

c.4) Démontrer que
$$\frac{1}{y} < \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} < \frac{1}{x}$$
(Indication : utilisez le TAF avec la fonction $u \mapsto \ln u$ sur un intervalle bien choisi).

c.5) En déduire que $g'(1) < 0 < g'(0)$.

c.6) Déduire des questions précédentes que g' s'annule une unique fois sur $]0, 1[$.

c.7) Déterminer le signe de g sur $[0, 1]$.

c.8) Conclure que $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est concave.