Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – analyse réelle
examen de deuxième session
mercredi 26 juin 2024
durée 1H30

Le barème est indicatif.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $P(x) = x^3 - 3x + 1$.

En étudiant les variations de P, montrer que P a 2 racines réelles > 0 et une racine réelle < 0 dans l'intervalle $[-2, 2]$. **3pts**

Exercice 2 Soit $u_0 > 0$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)\ .$$

Montrer que la suite (u_n) est décroissante, bien définie et trouver sa limite. **3pts**

Exercice 3 On pose

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\, \operatorname{th} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\ .$$

a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x$. **1pt**

b) On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \operatorname{th} n$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *(convergence absolue, convergence, divergence, divergence grossière). Justifier votre réponse.* **3pts**

c) Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\operatorname{th} u$. **3pts**

d) Soit

$$T\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \operatorname{th}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction T est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? **2pts**

e) En utilisant le résultat de la question c), montrer que lorsque $|x| \to +\infty$, T admet un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$ de la forme

$$T(x) = ax + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

où a, b sont des constantes que l'on déterminera. **2pts**

f) En déduire que T admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ et donner l'équation de cette asymptote. **1pt**

g) Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $-\infty$? et de $+\infty$? **2pts**

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$v_n = T(n) - n \ .$$

En utilisant les questions précédentes, étudier la nature de la série $\sum_n v_n$ *(convergence absolue, convergence, divergence, divergence grossière).* **2pts**