Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – analyse réelle
examen de deuxième session
mercredi 26 juin 2024
durée 1H30

Le barème est indicatif.
Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $P(x) = x^3 - 3x + 1$.

En étudiant les variations de P, montrer que P a 2 racines réelles > 0 et une racine réelle < 0 dans l'intervalle $[-2, 2]$. **3pts**

La fonction $x \mapsto P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or, $P(-2) = -1 < 0 < 3 = P(-1)$ donc P a une racine dans $]-2, -1[$. On a aussi $P(0) = 1 > 0 > -1 = P(1)$ donc P a une racine dans $]0, 1[$. Enfin, $P(1) = -1 < 0 < 3 = P(2)$ donc P a une racine dans $]1, 2[$. Cela fait trois racines dont une < 0 et deux > 0. Comme P est de degré 3, il n'y en a pas d'autres !

Exercice 2 Soit $u_0 > 0$. On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)\ .$$

Montrer que la suite (u_n) est décroissante, bien définie et trouver sa limite. **3pts**

En étudiant la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x)-x$ sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, on voit que : h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Donc

$$(*)\ \forall\, x > 0,\ h(x) < h(0) = 0\ .$$

On montre par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

C'est vrai pour $n = 0$. Si $u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ est défini et comme ln est croissante, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \geqslant \ln 1 = 0$.

On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \leqslant u_n$ Donc la suite (u_n) est décroissante.

C'est une suite minorée par 0 donc convergente. Soit $l = \lim u_n \geqslant 0$.

On a $l = \lim u_n = \lim u_{n+1} = \lim(1+u_n) = \ln(1+l)$ par continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

D'après $(*)$, on a forcément $l = 0$. Donc (u_n) converge vers 0.

Exercice 3 On pose

$$\forall\, u \in \mathbb{R},\ \operatorname{th} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\ .$$

a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th} x$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th} x$. **1pt** Pour tout x, $\operatorname{th} x = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \to_{x\to+\infty} 1$ et comme th est impaire, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.

b) On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \operatorname{th} n$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *(convergence absolue, convergence, divergence, divergence grossière). Justifier votre réponse.* **3pts**

On a :

$$1 - \operatorname{th} n = 1 - \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = 1 - (1-e^{-2n})(1-e^{-2n} + o(e^{-2n}))$$

car $\lim e^{-2n} = 0$. Donc $1 - \operatorname{th} n = 2e^{-2n} + o(e^{-2n}) \sim 2e^{-2n}$.

Comme $e > 1$, la série $\sum e^{-2n}$ converge donc la série $\sum 1 - \operatorname{th} n$ aussi. C'est une convergence absolue car $\forall\, n$, $1 - \operatorname{th} n \geqslant 0$.

c) Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\operatorname{th} u$. **3pts**

On connaît le développemnt limité de e^x en 0. On en déduit :

$$\operatorname{th} x = \frac{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + o(x^5)}{2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^5)}$$

$$= (x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})^2 + o(x^5))$$

$$= (x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5))$$

$$= (x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5))(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

d) Soit

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \operatorname{th}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction T est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? **2pts**

Comme

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 \operatorname{th}(\frac{1}{x}) = 0 \neq 1 = T(0)\,,$$

la fonction T n'est pas continue en 0. Elle n'est donc pas $\mathscr{C}^1$ non plus.

e) En utilisant le résultat de la question c), montrer que lorsque $|x| \to +\infty$, T admet un développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$ de la forme

$$T(x) = ax + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

où a, b sont des constantes que l'on déterminera. **2pts**

On a $\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc :

$$T(x) = x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o(\frac{1}{x^4}))$$

$$= x - \frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x^2})$$

lorsque $|x| \to \infty$.

Donc $a = 1$, $b = -\frac{1}{3}$.

f) En déduire que T admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ et donner l'équation de cette asymptote. **1pt**

Quand $|x| \to \infty$, $T(x) - x = o(1)$ donc l'asymptote est la droite $(y = x)$.

g) Quelle est la position du graphe de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $-\infty$? et de $+\infty$? **2pts** Au voisinage de $-\infty$, $T(x) - x = -\frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x}) \sim -\frac{1}{3x} > 0$ donc le graphe de T est **au-dessus** de l'asymptote.

Au voisinage de $+\infty$, $T(x) - x = -\frac{1}{3x} + o(\frac{1}{x}) \sim -\frac{1}{3x} < 0$ donc le graphe de T est **en-dessous** de l'asymptote.

h) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit
$$v_n = T(n) - n \ .$$

En utilisant les questions précédentes, étudier la nature de la série $\sum v_n$ *(convergence absolue, convergence, divergence, divergence grossière)*. **2pts**

On a $v_n = n - \frac{1}{3n} - n + o(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{3n} + o(\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{3n}$.
Or $-\frac{1}{3n}$ est de signe constant et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. Donc la série $\sum v_n$ diverge aussi *(bien que* $\lim v_n = 0$*)*.