Théorème. Soit (a_n) une suite qui converge vers a. Alors $\lim_n \frac{a_0+...+a_n}{n+1} = a$.

Démonstration : Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\forall\, n \geqslant N,\ \frac{a_0 + ... + a_n}{n+1} = \frac{a_0 + ... + a_{N-1}}{n+1} + \frac{a_N + ... + a_n}{n+1}$$

$$\leqslant \frac{a_0 + ... + a_{N-1}}{n+1} + \sup_{k \geqslant N} a_k \frac{n-N+1}{n+1}$$

$$\leqslant \frac{a_0 + ... + a_{N-1}}{n+1} + \sup_{k \geqslant N} a_k$$

$$\Rightarrow \limsup \frac{a_0 + ... + a_n}{n+1} \leqslant \sup_{k \leqslant N} a_k$$

en faisant $N \to \infty$, on obtient $\limsup \frac{a_0+...+a_n}{n+1} \leqslant \limsup a_n = \lim a_n = a$.

De même, $a = \lim a_n = \liminf a_n \leqslant \liminf \frac{a_0+...+a_n}{n+1}$.

Donc $\liminf \frac{a_0+...+a_n}{n+1} = \limsup \frac{a_0+...+a_n}{n+1} = \lim \frac{a_0+...+a_n}{n+1} = a$. **Q.e.d.**

Remarque. Le thèorème reste vrai si $a = \pm\infty$.

Lemme. Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergeant vers respectivement $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lim_n \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0}{n+1} = ab\ .$$

Démonstration : Soit $c_n = \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0}{n+1}$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\forall\, n \geqslant N,\ c_n = a\frac{b_n + b_{n-1} + ... + b_0}{n+1} + \frac{(a_0 - a)b_n + ... + (a_{N-1} - a)b_{n-N+1}}{n+1}$$

$$+ \frac{(a_N - a)b_{n-N} + ... + (a_n - a)b_0}{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall\, N,\ \limsup c_n \leqslant ab + \sup_{n \geqslant N} |a_n - a| \sup_k |b_k|$$

Donc si on fait $N \to \infty$, on obtient

$$\limsup c_n \leqslant ab\ .$$

De même, $ab \leqslant \liminf c_n$. Donc

$$\liminf c_n = \limsup c_n = \lim c_n = ab\ .$$

Q.e.d.

Théorème.
Soient (a_n), (b_n) deux suites.
On pose $\forall\, n$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $C_n = c_0 + ... + c_n$.
Si $\sum_n a_n$ converge vers A et si $\sum_n b_n$ converge vers B, alors

$$\lim_n \frac{C_0 + ... + C_n}{n+1} = AB\ .$$

Corollaire. Si $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$, $\sum_n c_n$ convergent vers respectivement A, B, C, alors $A = BC$.