Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2022-2023**
L3 - Maths pour l'enseignement UE : Analyse réelle

CC2 - 16 décembre 2022
DURÉE : 1H30

Avertissement : *Une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction. Toute réponse doit être justifiée et formulée sous la forme d'une phrase écrite en français (sujet, verbe, complément).*

Exercice 1.

1. Déterminer, en justifiant votre réponse, un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de
$$f(x) = 2^x + e^{2x} - x\ln(x^2 e^{x^2}).$$
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en zéro de
$$f(x) = \ln(1 + \cos x).$$
3. Déterminer, si elle existe, la limite suivante :
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x\sqrt{1+x} - e^x}{x^3}.$$

Exercice 2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{1 + x + x^2}, & \text{si } x > 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
2. Écrire un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro pour la fonction
$$x \mapsto \sqrt{1 + x + x^2}.$$
3. En déduire que la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro donné par :
$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x).$$
4. La fonction f est-elle continue en zéro ? (Justifier).
5. La fonction f est-elle dérivable en zéro ? (Justifier).
6. Si oui, calculer $f'(0)$ ainsi que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse zéro.
7. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$? (Justifier).

Exercice 3.

1. En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer que pour tout réel $x > 0$:
$$\frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$
2. En déduire que la suite $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.
3. Soient $u_n = S_n - \ln(n)$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel γ.
   (c) Montrer que $\gamma \in]0,1]$.

Exercice 4. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(0) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0,\alpha[$.
2. Montrer que f admet un minimum global et que ce minimum est atteint sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.