Correction du CC2 du 16 décembre 2022

DURÉE : 1H30

Exercice 1.

1. **(1 pts)** *Déterminer, en justifiant votre réponse, un équivalent simple quand* $x \to +\infty$ *de*

$$f(x) = 2^x + e^{2x} - x\ln(x^2e^{x^2}).$$

Pour tout x strictement positif (il suffit de prendre x dans un voisinage de $+\infty$) on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^x + e^{2x} - x\ln(x^2e^{x^2}) \\ &= e^{x\ln 2} + e^{2x} - x\ln(x^2) - x\ln(e^{x^2}) \\ &= e^{x\ln 2} + e^{2x} - 2x\ln(x) - x^3 \\ &= e^{2x}\left(1 + e^{(\ln 2 - 2)x} - \frac{2x\ln(x)}{e^{2x}} - \frac{x^3}{e^{2x}}\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(\ln 2-2)x} = 0$ car $\ln 2 - 2 < 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x\ln(x)}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = 0$ par croissances comparées, on voit que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x}.$$

2. **(2 pts)** *Déterminer un développement limité à l'ordre* 3 *en zéro de*

$$f(x) = \ln(1 + \cos x).$$

Comme $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to0}(x^3)$ on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + \cos x) \\ &= \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right) \\ &= \ln\left(2\Big(1 - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to0}{o}(x^3)\Big)\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right). \end{aligned}$$

Posons $u = -\frac{x^2}{4} + o_{x\to0}(x^3)$. Lorsque $x = 0$ on a $u = 0$. On peut donc composer le développent limité $u = -\frac{x^2}{4} + o_{x\to0}(x^3)$ avec le développement limité de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 qui est donné, à l'ordre 3, par :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{u\to0}{o}(u^3).$$

Ici on a $u \sim_{x\to0} -\frac{x^2}{4}$ donc $u^2 \sim_{x\to0} \frac{x^4}{16}$ et $u^3 \sim_{x\to0} -\frac{x^6}{64}$. On en déduit que $-\frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_{u\to0}(u^3) = o_{x\to0}(x^3)$. Donc

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right) = \ln(1+u) = u + \underset{x\to0}{o}(x^3) = -\frac{x^2}{4} + \underset{x\to0}{o}(x^3).$$

Finalement, le développement limité à l'ordre 3 en zéro de $f(x)$ est

$$f(x) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to0}{o}(x^3).$$

3. **(2 pts)** *Déterminer, si elle existe, la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x\sqrt{1+x}-e^x}{x^3}.$$

Comme il y a x^3 au dénominateur, on fait un développement limité à l'ordre 3 en zéro du numérateur. Commençons par le développement limité de $x\sqrt{1+x}$. Pour obtenir un développement limité à l'ordre 3 de cette expression, il suffit de déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc

$$x\sqrt{1+x} = x\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

On en déduit le développement limité à l'ordre 3 en zéro du numérateur :

$$\begin{aligned} 1+x\sqrt{1+x}-e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\ &= -\frac{x^3}{8} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\ &= -\frac{7}{24}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3). \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\frac{1+x\sqrt{1+x}-e^x}{x^3} = -\frac{7}{24} + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

On en conclut que la limite existe et est égale à $-\frac{7}{24}$.

Exercice 2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in [0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{1+x+x^2}, & \text{si } x > 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. **(1 pts)** *Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.*

   Pour montrer que f est dérivable, il suffit de (et il faut) vérifier que l'argument dans la fonction racine carrée est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $1+x+x^2$ est un trinôme en x de discriminant $\Delta = 1-4 = -3$ qui est strictement négatif, il est de signe constant donné par le signe du coefficient dominant, c'est à dire strictement positif. La fonction f est donc bien dérivable par composition de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1+2x}{2\sqrt{1+x+x^2}}.$$

2. **(2 pts)** *Écrire un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro pour la fonction*

$$x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}.$$

   On pose $u = x + x^2 = x + o_{x\to 0}(x)$. Lorsque $x = 0$ on a $u = 0$. On peut donc composer le développement limité $u = x + o_{x\to 0}(x)$ avec le développement limité de $\sqrt{1+u}$ à l'ordre 1 au voisinage de 0 qui est donné par :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u).$$

   Comme $u \sim_{x\to 0} x$ on a $o_{u\to 0}(u) = o_{x\to 0}(x)$. On en déduit que :

$$\sqrt{1+x+x^2} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

3. **(1 pts)** *En déduire que la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro donné par :*

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Comme $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ lorsque $x \to 0$, on a $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o_{x\to 0}(x)$, d'où le résultat.

4. **(1 pts)** *La fonction f est-elle continue en zéro ? (Justifier).*

D'après le développement limité ci-dessus, on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$. La fonction f et donc continue en 0.

5. **(1 pts)** *La fonction f est-elle dérivable en zéro ? (Justifier).*

Comme la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en zéro, elle est dérivable en zéro.

6. **(1 pts)** *Si oui, calculer $f'(0)$ ainsi que l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse zéro.*

$f'(0)$ est le coefficient du terme d'ordre 1 dans le développement limité en zéro. On peut le redémontrer en calculant la limite du taux d'accroissement en zéro à partir du développement limité :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1)\right) = \frac{1}{2}.$$

Donc $f'(0) = \frac{1}{2}$. Quant à l'équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse zéro, elle est donnée par les deux premiers termes du développement limité en zéro :

$$y = 1 + \frac{x}{2}.$$

7. **(2 pts)***La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$? (Justifier).*

Comme

$$\lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1 + 2x}{2\sqrt{1 + x + x^2}}\right) = \frac{1}{2},$$

mais que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$, $f'(x)$ n'a pas de limite en 0. f' n'est donc pas continue en 0. f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3.

1. **(2 pts)** *En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer que pour tout réel $x > 0$:*

$$\frac{1}{1 + x} \leq \ln(x + 1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Soit $x > 0$. La fonction ln est continue sur $[x, x + 1]$, dérivable sur $]x, x + 1[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis : il exsite $c_x \in]x, x + 1[$ tel que :

$$\ln(x + 1) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}.$$

Comme $c_x \in]x, x + 1[$ on a $1/(1 + x) < 1/c_x < 1/x$ ce qui donne le résultat.

2. **(1 pts)** *En déduire que la suite $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question 1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k + 1) - \ln(k)) = \ln(n + 1) - \ln(1) = \ln(n + 1).$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n + 1) = +\infty$ on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3. **(2 pts)** *Soient $u_n = S_n - \ln(n)$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$.*

   (a) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.*

   Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $S_{n+1} - S_n = 1/(n+1)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

   $$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)),$$
   $$v_{n+1} - v_n = S_{n+1} - S_n - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)).$$

   En appliquant l'inégalité de la question 1 avec $x = n$ on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et en appliquant l'inégalité de la question 1 avec $x = n+1$ on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ c'est-à-dire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   (b) **(2 pts)** *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel γ.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On en déduit que tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \geq v_n$ et que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, elles sont adjacentes et convergent donc vers un même réel γ.

   (c) **(1 pts)** *Montrer que $\gamma \in]0,1]$.*

   Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ, on a $1 = u_1 \geq \gamma$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ, on a $1 - \ln(2) = v_1 \leq \gamma$. Comme $1 - \ln(2) > 0$ on a $\gamma > 0$.

<u>Exercice 4.</u> *Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(0) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

1. **(1 pts)** *Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [0,\alpha[$.*

   Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, f' est continue en 0, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha[$:
   $$f'(0) - \varepsilon \leq f'(x) \leq f'(0) + \varepsilon.$$
   En choisissant $\varepsilon = -f'(0)/2$, on voit donc qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha[$, $f'(x) \leq f'(0)/2 < 0$.

2. **(1 pts)** *Montrer que f admet un minimum global et que ce minimum est atteint sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$.*

   Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $M \in]0,+\infty[$ tel que pour tout $x \in]M,+\infty[$, $f(x) \geq A$. En particulier, pour $A = f(0)$, il existe $M \in]0,+\infty[$ tel que pour tout $x \in]M,+\infty[$, $f(x) \geq f(0)$. Comme $0 \in [0,M]$ on a alors
   $$\inf_{x\in[0,+\infty[} f(x) = \inf_{x\in[0,M]} f(x).$$
   Comme f est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur le compact $[0,M]$. En particulier, f admet un minimum sur $[0,M]$ qui est donc un minimum sur $[0,+\infty[$.

   Il reste à vérifier que ce minimum n'est pas atteint en 0. On considère le α de la question 1. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\alpha]$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c \in]0,\alpha[$ tel que
   $$f(\alpha) - f(0) = f'(c)\alpha.$$
   Comme $c \in]0,\alpha[$, on a $f'(c) < 0$ donc $f(\alpha) < f(0)$. Le minimum n'est donc pas atteint en 0.