Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre d'automne 2022-2023

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement | 2 novembre 2021. Durée : 1h30

Contrôle Continu

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. (2,5pts) Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 2. (2,5pts)
Soit $A \subset]0, +\infty[$, on note

$$\frac{1}{A} := \{\frac{1}{x}\ ;\ x \in A\}.$$

Montrer que $\sup\left(\dfrac{1}{A}\right) = \dfrac{1}{\inf A}$.

Exercice 3. (3 pts) Etudier la convergence et chercher dans le cas échéant les limites des suites suivantes $(u_n)_n$ où :

1. $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$,
2. $u_n = (n + \frac{2}{n})^3 - n^3$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. (7pts) Soient a et b deux réels strictement positifs tel que $a \leq b$. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par :

$$a_0 = a \ \text{ et } \ b_0 = b \ \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. (1pt) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$.
2. a. (1pt) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$
   b. (1,5pt) En déduire par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.
3. (3pts) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on déduire pour la convergence de ces deux suites ?

Exercice 5. (6,5pts) Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants ($\sum_n u_n$ absolument convergente, semi-convergente, divergente, grossièrement divergente ?) :

1. (1,5pts) $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ pour $n \geq 0$,
2. (1,5pts) $u_n = (-1)^n e^{-n+\sqrt{n}}$ pour $n \geq 0$,
3. (2pts) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \frac{2}{\sqrt{n}}}$ pour $n \geq 2$,
4. (1,5pts) $u_n = \frac{2^{n^2}}{(n-1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'Exercice 1 :
Montrons que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. Par l'absurde, supposons que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q}$, il existe alors $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{p}{q}$.
On a alors $p \ln 3 = q \ln 2$. En appliquant exponentielle à cette égalité, on obtient

$$3^p = e^{p \ln 3} = e^{q \ln 2} = 2^q.$$

On a alors 2 divise 3^p absurde car 2 et 3 sont premiers entre eux et donc pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$, 2^k et 3^l sont premiers entre eux.
Par suite, $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$.

Correction de l'Exercice 2 :
Soit $A \subset]0, +\infty[$, on note

$$\frac{1}{A} := \{\frac{1}{x}\ ;\ x \in A\}.$$

Montrons que $\sup(\frac{1}{A}) = \frac{1}{\inf A}$ avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$.
Notons que comme $A \subset]0, +\infty[$, alors $0 \leq \inf A < +\infty$.

i) Montrons que $\frac{1}{\inf A}$ est un majorant de $\frac{1}{A}$.
On a pour tout $x \in A$, $x > 0$ car $A \subset]0, +\infty[$ et $x \geq \inf A > 0$ (avec $x > \inf A$ si $\inf A = 0$) et donc $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf A}$ ($0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\inf A} = +\infty$ si $\inf A = 0$).
D'où $\frac{1}{\inf A}$ est un majorant de $\frac{1}{A}$.

ii) **1ère méthode :**
Montrons qu'il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\frac{1}{A}$ telle que $\lim\limits_n x_n = \dfrac{1}{\inf A}$.
D'après la caractérisation séquentielle de $\inf A$, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A tel que $\lim\limits_n a_n = \inf A$. La suite $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_n$ est une suite d'éléments de $\frac{1}{A}$ et on a $\lim\limits_n \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_n a_n} = \dfrac{1}{\inf A}$ (de même avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$).

2ème méthode : Soit M un majorant de $\frac{1}{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ ($0 < M \leq \infty$ car $\frac{1}{A} \subset]0, +\infty[$).
On a alors $\forall x \in A$, $0 < \frac{1}{x} \leq M$ avec $0 < \frac{1}{x} < M$ si $M = +\infty$.
Par suite, $\forall x \in A$, $x \geq \frac{1}{M}$ avec $x > \frac{1}{M}$ si $M = +\infty$. D'où $\frac{1}{M}$ est un minorant de A.
Comme $\inf A$ est le plus grand minorant de A, on déduit que $\frac{1}{M} \leq \inf A$ et donc $M \geq \frac{1}{\inf A}$.

Conclusion : i) et ii) nous donnent que $\frac{1}{\inf A}$ est le plus petit majorant de $\frac{1}{A}$ et par suite c'est $\sup(\frac{1}{A})$.

Remarque : Notons qu'on aurait pu remarquer au début que si $\inf A = 0$, $\frac{1}{\inf A} = +\infty$ (par convention) alors $\frac{1}{A}$ n'est pas majorée et donc $\sup(\frac{1}{A}) = +\infty = \frac{1}{\inf A}$. En effet, $\frac{1}{A}$ n'est pas majorée car par exemple, comme $\inf A = 0$, il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A tel que $\lim\limits_n a_n = 0$. La suite $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)_n$ est une suite d'éléments de $\frac{1}{A}$ et on a $\lim\limits_n \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_n a_n} = +\infty$.

Correction de l'Exercice 3 :

1. $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})}$.
Comme $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $\ln(1 - \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ (car $u = \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$) et donc $n \ln(1 - \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1 \underset{n \to +\infty}{\to} -1$. Comme exponentielle est continue, on déduit alors que $\lim\limits_n u_n = \lim\limits_n e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{-1} \in \mathbb{R}$.
Donc $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $l = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

2.

$$\begin{aligned} u_n &= (n+\frac{2}{n})^3 - n^3 \\ &= n^3 + \frac{8}{n^3} + 6n + \frac{12}{n} - n^3 \\ &= 6n + \frac{8}{n^3} + \frac{12}{n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty. \end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.)

Par suite, la suite $(u_n)_n$ diverge ($\lim\limits_n u_n = +\infty$).

Correction de l'exercice 4

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$.
   On a $0 < a_0 = a \leq b_0 = b$.
   Montrons que $\forall n \geq 1$, $a_n \leq b_n$.
   On a pour tout $n \geq 0, (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 = a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} \geq 0$.
   On déduit alors que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n) = b_{n+1}$ i.e. pour tout $n \geq 1$, $0 \leq a_n \leq b_n$.
   Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$
2. a. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \sqrt{a_n a_n} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ où on a utilisé le fait que $a_n \leq b_n$ et donc $\sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_n}$.

   b. Montrons maintenant par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.
   Initialisation : vraie pour $n = 0$ car $b - a = \frac{b-a}{2^0}$.
   Hérédité : Supposons que $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ pour $n \geq 0$ et montrons que $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$.
   On a d'après a. et l'hypothèse de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Conclusion : D'après le principe de récurrence, on déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.
3. Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes.
   i) Montrons que $(a_n)_n$ est croissante.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n \geq \sqrt{a_n^2} - a_n = a_n - a_n = 0$ car $b_n \geq a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$ et donc $(a_n)_n$ croissante.
   ii) Montrons que $(b_n)_n$ est décroissante.
   On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$ car $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leq b_n$ et donc $(b_n)_n$ est décroissante.
   iii) Comme d'après 2.b., on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$ avec $\lim\limits_n \dfrac{b-a}{2^n} = 0$, on déduit alors que $\lim\limits_n (b_n - a_n) = 0$.
   Conclusion : D'après i), ii) et iii), les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et donc converge vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq l \leq b_n$.

Correction de l'Exercice 5 :

1. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ pour $n \geq 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n = ne^{-\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2}) \tag{1}$$

car $\lim\limits_n n^2 u_n = \lim\limits_n \dfrac{n^3}{e^{\sqrt{n}}} = 0$ par croissance comparée.

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (2) que $\sum\limits_n u_n$ converge (absolument).

2. $u_n = (-1)^n e^{-n+\sqrt{n}}$ pour $n \geq 0$.

Convergence absolue de $\sum\limits_n u_n$:

1ère méthode :

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n|^{\frac{1}{n}} = e^{-1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{e} = e^{-1} < 1$.

Comme $e^{-1} < 1$, on déduit alors de la Règle de Cauchy que $\sum\limits_n |u_n|$ converge i.e. $\sum\limits_n u_n$ converge absolument et donc en particulier converge.

2ème méthode :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |u_n| = e^{-n+\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^2}) \tag{2}$$

car $\lim\limits_n n^2|u_n| = \lim\limits_n \dfrac{n^2}{e^{n-\sqrt{n}}} = 0$ par croissance comparée.

En effet $\frac{n^2}{e^{n-\sqrt{n}}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1-\frac{2\ln n}{\sqrt{n}})}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$, on déduit de (2) que $\sum\limits_n |u_n|$ converge i.e. $\sum\limits_n u_n$ converge absolument et donc en particulier converge.

3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \frac{2}{\sqrt{n}}}$ pour $n \geq 2$.

Convergence absolue de $\sum\limits_n u_n$:

On a

$$\forall n \geq 2 \quad , |u_n| = \frac{1}{n - \frac{2}{\sqrt{n}}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

car $\frac{n-\frac{2}{\sqrt{n}}}{n} = 1 - \frac{2}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge, série de Riemann avec $\alpha = 1$, on déduit alors que $\sum\limits_n |u_n|$ diverge et donc $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ ne converge pas absolument.

Convergence de $\sum\limits_n u_n$:

$\sum\limits_n u_n$ est une série alternée car $(-1)^n u_n = \frac{1}{n-\frac{2}{\sqrt{n}}} \geq 0$ pour tout $n \geq 2$ donc garde un signe constant. De plus,

i) $\forall n$, $|u_n| = \frac{1}{n-\frac{2}{\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

et

ii) $(|u_n|)_{n\geq 2}$ décroissante car $(n)_n$ croissante et $(-\frac{2}{\sqrt{n}})$ croissante
En effet, on a $\forall n \geq 2$, $0 < \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$ (car $t \to \sqrt{t}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$), ce qui nous donne $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $0 < -\frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.
On obtient alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq n - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq n+1-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$.
Par suite, $0 < \frac{1}{n+1-\frac{2}{\sqrt{n+1}}} \leq \frac{1}{n-\frac{2}{\sqrt{n}}}$.
On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ et donc $(|u_n|)_n$ décroissante.

Remarque : Pour montrer que $(|u_n|)_{n\geq 2}$ est décroissante, on aurait pu montrer que $f : x \to x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ est croissante sur $[2, +\infty[$ (même strictement croissante), car f est C^1 sur $[2, +\infty[$ avec $f'(x) = 1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} \geq 0$, $\forall x \geq 0$. On obtient alors $\forall n \geq 2$, $0 < f(2) \leq f(n) \leq f(n+1)$ et donc $\forall n \geq 2$, $|u_{n+1}| = \frac{1}{f(n+1)} \leq \frac{1}{f(n)} = |u_n|$ i.e. $(|u_n|)_n$ décroissante.

On aurait pu aussi montrer directement que $g : x \to \frac{1}{x-\frac{2}{\sqrt{x}}}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$.

Conclusion : On déduit du CSSA que $\sum_n u_n$ converge.

4. $u_n = \dfrac{2^{n^2}}{(n-1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc appliquer D'Alembert.

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n-1)!}{n!}\frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = \frac{1}{n}2^{(n+1)^2-n^2} = \frac{2^{2n+1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} l = +\infty > 1$$

par croissance comparée.
Comme $l = +\infty > 1$, on déduit alors de la règle de D'Alembert que $\sum_n u_n$ diverge grossièrement.