Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2022-2023

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement — 2 novembre 2021. Durée : 1h30

Contrôle Continu

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1. (2,5pts) Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

Exercice 2. (2,5pts)
Soit $A \subset]0, +\infty[$, on note

$$\frac{1}{A} := \{\frac{1}{x}\,;\, x \in A\}.$$

Montrer que $\sup\left(\dfrac{1}{A}\right) = \dfrac{1}{\inf A}$.

Exercice 3. (3 pts) Etudier la convergence et chercher dans le cas échéant les limites des suites suivantes $(u_n)_n$ où :

1. $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$,
2. $u_n = (n + \frac{2}{n})^3 - n^3$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. (7pts) Soient a et b deux réels strictement positifs tel que $a \leq b$. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ les suites définies par :

$$a_0 = a \ \text{ et } \ b_0 = b \ \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. (1pt) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$.
2. a. (1pt) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$
   b. (1,5pt) En déduire par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$.
3. (3pts) Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. Que peut-on déduire pour la convergence de ces deux suites ?

Exercice 5. (6,5pts) Etudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants ($\sum_n u_n$ absolument convergente, semi-convergente, divergente, grossièrement divergente ?) :

1. (1,5pts) $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ pour $n \geq 0$,
2. (1,5pts) $u_n = (-1)^n e^{-n+\sqrt{n}}$ pour $n \geq 0$,
3. (2pts) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \frac{2}{\sqrt{n}}}$ pour $n \geq 2$,
4. (1,5pts) $u_n = \frac{2^{n^2}}{(n-1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.